
СТРУЧНИ РАДОВИ

УПОТРЕБА ДУБОКОГ УЧЕЊА У ПРОГНОЗИ ГОТОВОГ НОВЦА У ОПТИЦАЈУ

Иван Поповић

За ставове изнете у радовима у оквиру ове серије одговоран је аутор и ставови не представљају нужно званичан став Народне банке Србије.

Сектор за монетарне и девизне операције

НАРОДНА БАНКА СРБИЈЕ

Београд, Краља Петра 12

Тел.: (+381 11) 3027 100

Београд, Немањина 17

Тел.: (+381 11) 333 8000

www.nbs.rs

Употреба дубоког учења у прогнози готовог новца у оптицају

Иван Поповић

Апстракт: Ради унапређења квалитета дневне прогнозе готовог новца у оптицају (ГНО), развијена су четири модела дубоког машинског учења. Перформансе ових модела систематски су упоређене с постојећим моделом *ARIMAX* (65,1,65,18), коригованим експертском проценом. Анализа обухвата период од јануара 2025. до марта 2026. године и заснива се на временској серији од 5.497 дневних опсервација. Резултати показују да модел *ARIMAX* остварује супериорне перформансе у разматраном периоду, док модел *LSTM* с *L1 + L2 ElasticNet* регуларизацијом (Модел 3) достиже виши коефицијент детерминације када се из анализе искључи јануар 2025. године, период обележен непредвиђеном променом у динамици исплате пензија. Рад разрађује математичке основе оба приступа, детаљно описује архитектуру развијених модела и анализира феномен *overfitting*-а.

Кључне речи: *LSTM*, *ARIMAX*, готов новац у оптицају, машинско учење, дубоко учење, *overfitting*, регуларизација, *ElasticNet*.

[JEL Code]: C22, C45, C53, E41, E51.

Нетехнички резиме

Предмет истраживања овог рада јесте прогноза готовог новца у оптицају (ГНО) као једног од важних аутономних фактора који утиче на ликвидност банкарског сектора. Потражња за готовином следи предвидиве обрасце – расте уочи викенда, на почетку месеца и пред празнике, али је подложна и наглим, тешко предвидивим скоковима када држава, на пример, промени термин исплате пензија или социјалних давања.

Класични статистички приступ прогнозирању готовог новца (модел *ARIMAX*) подразумева да аналитичар, на основу искуства, унапред дефинише све факторе за које сматра да утичу на кретање готовине – датуме празника, термине исплата, сезонске обрасце и слично. Овај приступ је проверен, транспарентан и даје резултате које је лако интерпретирати.

Модел дубоког машинског учења (модел *LSTM*) засновани на неуронским мрежама раде другачије – самостално откривају обрасце у великим количинама историјских података, без претходног задавања правила. Њихову потенцијалну предност чини способност да уоче сложене зависности које аналитичар можда не би препознао. Међутим, кључно питање остаје колико добро функционишу када се у пракси догоди нешто ново – промена коју нису имали прилику да науче из прошлих података.

Класични статистички модел узима у обзир кретање готовине из претходних 65 дана и ослања се на 18 унапред дефинисаних фактора које је аналитичар препознао као значајне – датуме исплата, празнике, почетак месеца и слично.

Четири модела неуронских мрежа пројектована су с прогресивно строжим мерама предострожности против такозване „преприлагођености” (*overfitting*) – честе слабости модела вештачке интелигенције која се огледа у томе да модел одлично описује историјске податке на којима је трениран, али да даје лоше резултате када се суочи с новим, невиђеним ситуацијама. Сваки наредни модел имао је додатне механизме заштите од ове појаве, од најједноставније конфигурације до најсложеније с деветоструком заштитом.

Класични модел, уз стручну корекцију аналитичара, показао се као најпоузданији у тестираном периоду. Модел неуронских мрежа заказали су у јануару 2025. године, када је промењен термин исплате пензија, нешто с чим се раније нису сусретали и нису могли да предвиде. Када се тај месец искључи из поређења, неуронске мреже постижу боље резултате, што указује на то да, уз довољно репрезентативне историјске податке, имају реалан потенцијал да надмаше класичан приступ.

Посебно се истиче трећи модел заснован на неуронским мрежама, који је, захваљујући додатним механизмима заштите од преприлагођености, боље развио способност да се прилагоди новим, невиђеним ситуацијама, а не само да добро описује оно што је већ виђено у прошлости.

Садржај:

1. Увод.....	70
2. Теоријска основа и преглед релевантне литературе	70
2.1. Прогноза ликвидности у централном банкарству.....	70
2.2. Модел <i>ARIMA</i> и <i>ARIMAX</i> у прогнози временских серија.....	71
2.3. <i>LSTM</i> мреже у прогнози економских временских серија.....	71
2.4. <i>Overfitting</i> и регуларизација у дубоком учењу	72
3. Математичка формулација модела	72
3.1. <i>ARIMAX</i> модел.....	72
3.1.1. Основна структура.....	72
3.1.2. Стационарност и идентификација.....	73
3.1.3. Егзогене променљиве	73
3.1.4. Дијагностика резидуала модела <i>ARIMAX</i>	74
3.2. Модел <i>LSTM</i>	75
3.2.1. Архитектура <i>LSTM</i> ћелије.....	75
3.2.2. Густо повезани слојеви (<i>Dense</i>) и активационе функције	76
3.2.3. <i>ElasticNet</i> регуларизација	76
3.2.4. Прозорски механизам и итеративна прогноза	77
3.2.5. Параметри евалуације	77
4. Развијени модели и емпиријски резултати.....	78
4.1. Припрема података за анализу.....	78
4.2. Модел 1: <i>LSTM</i> (128→64→16→1).....	79
4.2.1. Архитектура и параметри	79
4.2.2. Резултати и дијагностика	79
4.3. Модел 2: <i>LSTM</i> (128→64→16→1) – други критеријум <i>overfitting</i> -а	80
4.4. Модел 3: <i>LSTM</i> (128→64→16→1) са <i>ElasticNet</i> регуларизацијом	81
4.5. Модел 4: <i>LSTM</i> (64→32→8→1) – <i>anti-overfitting</i> архитектура.....	82
4.6. Модел <i>ARIMAX</i> (65,1,65,18)	84
5. Упоредна анализа перформанси.....	85
5.1. Показатељи	85
5.2. Месечна анализа перформанси.....	86
5.3. Анализа грешака	87
6. Закључак.....	88
Прилог: Детаљно поређење архитектура модела	90
Литература	93
Скраћенице.....	94

1. Увод

Управљање дневном ликвидношћу банкарског сектора један је од темељних оперативних задатака сваке централне банке. У оквиру аутономних фактора свакодневно се процењује кретање готовог новца у оптицају (ГНО) како би централна банка правовремено реаговала на промене ликвидности банкарског сектора.

Временску серију дневних промена ГНО карактеришу три структурна својства која је чине изузетно захтевном за моделирање: (1) изражена вишедимензионална сезоналност (недељни, месечни и годишњи циклуси), (2) присуство импулсних шокова повезаних с државним и верским празницима и (3) повремене структурне промене узроковане променама у фискалној и социјалној политици, попут измене динамике исплате пензија, неочекиваних економских шокова и промена у понашању грађана.

Традиционални економетријски модели класе *ARIMA*, а нарочито њихова проширена форма *ARIMAX* са егзогеним променљивим, дуго су представљали стандард у прогнозирању новчаних токова централних банака. Напредак у области машинског учења, а посебно развој архитектура дубоког учења за временске серије, отворио је питање да ли модели типа *LSTM* (*Long Short-Term Memory*) могу да конкуришу или надмаше класичне економетријске приступе у овом специфичном задатку.

Модели дубоког машинског учења типа *LSTM* развијени су у програмском језику *Python*, уз коришћење алата вештачке интелигенције, *Claude* и *ChatGPT-a*, као помоћних средстава у развоју кода.

Овај рад има троструки циљ: (1) развити и систематски анализирати четири *LSTM* модела прилагођена прогнози дневних промена ГНО; (2) упоредити их с постојећим моделом *ARIMAX* (65,1,65,18), који се оперативно користи; (3) на основу емпиријских резултата дати конкретне препоруке у избору модела за прогнозу ГНО. Посебна пажња посвећена је проблему *overfitting-a*, појави при којој модел изузетно добро описује податке на којима је трениран, али лоше генерализује, односно ради с новим подацима, што је кључни фактор при оцени употребљивости модела *LSTM* у пракси. Рад је организован на следећи начин: Поглавље 2 приказује теоријску основу и преглед релевантне литературе; Поглавље 3 описује математичке формулације оба приступа; Поглавље 4 представља развијене моделе и емпиријске резултате; Поглавље 5 доноси упоредну анализу; Поглавље 6 износи закључке анализе.

2. Теоријска основа и преглед релевантне литературе

2.1. Прогноза ликвидности у централном банкарству

Централне банке су од средине деведесетих година 20. века интензивно развијале квантитативне моделе за прогнозирање аутономних фактора ликвидности, међу које спада и ГНО. Пионирски радови *Bindseil et al.* (2002) и *Whitesell* (2006) систематизују

приступе прогнози ликвидности у зони евра, идентификујући сезоналност и календарске ефекте као доминантне генераторе предвидиве варијабилности.

У контексту аутономних фактора, сезоналност ГНО је посебно изражена. Крајем децембра и почетком јануара, током периода пензије, генеришу се осцилације ГНО које могу бити за ред величине веће од типичног дневног кретања. Моделирање овог ефекта захтева експлицитне вештачке променљиве или примену архитектура способних да аутоматски препознају вишеструке сезонске циклусе.

2.2. Модели *ARIMA* и *ARIMAX* у прогнози временских серија

Box и *Jenkins* (1970) поставили су темеље савременог приступа моделирању временских серија кроз *ARIMA* (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) оквир. Овај модел обједињује ауторегресиону компоненту, диференцирање ради постизања стационарности и компоненту покретних просека, чиме се формира флексибилан алат за линеарно моделирање стохастичких процеса.

Проширење на *ARIMAX* (*ARIMA* са егзогеним променљивим), које је формализовао *Hamilton* (1994), омогућава укључивање детерминистичких сезонских ефеката и егзогених шокова директно у структуру модела. Ова особина чини модел *ARIMAX* нарочито прикладним за прогнозу ГНО, јер је утицај празника и календарских фактора доминантан и може се прецизно квантификовати статистичким тестирањем коефицијената уз егзогене променљиве.

Студије *Brockwell* и *Davis* (2002) и *Lütkepohl* (2005) документују да модели *ARIMAX* остварују високу предиктивну тачност на сезонским макроекономским серијама када су егзогене променљиве правилно спецификоване. Ограничење приступа лежи у претпоставци линеарности веза и потреби за ручним спецификавањем свих релевантних променљивих.

2.3. *LSTM* мреже у прогнози економских временских серија

Hochreiter и *Schmidhuber* (1997) увели су *LSTM* архитектуру као решење за проблем нестајања градијената (*vanishing gradient problem*) у класичним рекурентним неуронским мрежама. Механизми пролаза или капија (*gating mechanisms*) *LSTM* ћелије омогућавају селективно памћење дугорочних зависности, што је кључно за економске серије с дугом меморијом.

Fischer и *Krauss* (2018) показују да *LSTM* мреже надмашују класичне статистичке моделе у прогнози приноса на *S&P 500* акције, посебно у турбулентним периодима. *Makridakis et al.* (2018) у четвртм међународном такмичењу прогноза (M4), међутим, документују да хибридни приступи који комбинују статистичке моделе и машинско учење конзистентно надмашују оба приступа појединачно.

У контексту прогнозе новчаних токова централних банака, *Papadimitriou et al.* (2019) примењују модел *LSTM* на дневне токове ликвидности Европске централне банке и налазе побољшање у поређењу с моделима *ARIMA* за хоризонте прогнозе краће од пет

дана. *Huang et al.* (2020) документују да регуларизационе технике, нарочито *Dropout* и *L2* регуларизација, имају критичан утицај на генерализационе перформансе модела *LSTM* на кратким финансијским серијама.

Кључно истраживачко питање које остаје отворено јесте у којој мери модели *LSTM* робустно генерализују када настану структурни ломови у серији, где су класични економетријски модели са експертским прилагођавањем показали предност у емпиријским студијама.

2.4. *Overfitting* и регуларизација у дубоком учењу

Overfitting – ситуација у којој модел превише добро описује податке на којима је трениран (тренинг податке), укључујући случајни шум, али слабо предвиђа нове опсервације – представља основни проблем у примени дубоких неуронских мрежа на економске серије са ограниченим бројем опсервација. *Srivastava et al.* (2014) уводе *Dropout* регуларизацију као ефикасан механизам превенције *overfitting*-а, док *Ioffe* и *Szegedy* (2015) развијају *Batch Normalization*, која стабилизује дистрибуцију активација између слојева.

Zou и *Hastie* (2005) формализују *ElasticNet* регуларизацију као комбинацију *L1* (*Lasso*) и *L2* (*Ridge*) пенала. *L1* регуларизација форсира ретка решења елиминацијом неважних параметара, док *L2* спречава експлозију параметара. Комбинација ових приступа даје модел који је истовремено једноставан (парсимониозан), стабилан и отпоран на мултиколинеарност у улазним променљивима.

3. Математичка формулација модела

3.1. *ARIMAX* модел

3.1.1. Основна структура

Нека је y_t дневна промена ГНО у тренутку t . *ARIMAX* (p, d, q) модел са егзогеним променљивима X_t дефинише се као:

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \Theta(L)\varepsilon_t + \beta'X_t \quad (3.1)$$

где су:

$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ – ауторегресивни полином (*AR*) реда p у оператору доцње L , који моделира зависност од сопствених прошлих вредности;

$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q$ – полином покретних просека (*MA*) реда q , који моделира зависност од прошлих грешака прогнозе;

$(1-L)^d$ – оператор разлике (диференцирања) реда d , којим се временски ред чини стационарним;

$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ – процес бели шум (*White Noise*) с нултом средином и константном варијансом;

X_t – вектор егзогених променљивих (вештачке сезонске променљиве, празници);

β' – вектор коефицијената уз егзогене променљиве.

3.1.2. Стационарност и идентификација

Услов стационарности модела *ARIMAX* захтева да се сви инверзни корени полинома $\Phi(z)$ налазе унутар јединичног круга у комплексној равни, тј. $|z| < 1$ за свако z такво да је $\Phi(z) = 0$. Аналогно, инвертибилност модела захтева да се сви инверзни корени полинома $\Theta(z)$ налазе унутар јединичног круга.

Модел *ARIMAX* (65,1,65,18) изабран је на основу упоредне анализе коефицијента детерминације и *AIC/BIC* критеријума, у конкуренцији модела с различитим редовима *AR* и *MA* компонената. За модел *ARIMAX* (65,1,65,18), који се анализира у овом раду, $d = 1$ означава моделирање дневних промена ГНО (прва диференца), а не ниво серије. Ово одговара емпиријском налазу да је ГНО интегрисан процес реда један $I(1)$, што је потврђено *Augmented Dickey-Fuller*-овим тестом (*ADF* тест). Ауторегресивни део ($p = 65$) и део покретних просека ($q = 65$), заједно са 18 егзогених променљивих, дају моделу капацитет да разуме сезоналност распона до три месеца уназад.

$$\Delta y_t = (1-L)y_t = y_t - y_{t-1} \quad (3.2)$$

где Δy_t представља дневну промену ГНО у милионима динара.

3.1.3. Егзогене променљиве

У моделу *ARIMAX* (65,1,65,18) укључене су следеће категорије егзогених променљивих:

- недељни ефекти (број недеље у години, четири бинарне променљиве): $W1$, $W6$, $W10$ и $W48$, где $W_j = 1$ ако је прва недеља у години;
- месечни ефекти (1 бинарна променљива): *Secondw* друга недеља у месецу;
- ефекти празника (13 променљивих): бинарне променљиве за државне и верске празнике;

$$X_t = [W1, W6, W10, W48, \text{SECONDW}, \text{NY_1A}, \text{NY_4A}, \text{NY_5A}, \text{CHR_2A}, \text{EH_1A}, \text{EH_2A}, \text{TW1}, \text{TW4}, \text{WT1}, \text{WT4}, \text{MT2}, \text{MT3}, \text{MT4}] \quad (3.3)$$

Укупно 18 статистички значајних егзогених променљивих означено је на основу p -вредности $\leq 0,10$ (ниво значајности 10%), чиме се обезбеђује да свака променљива доприноси објашњењу варијансе зависне променљиве.

Селекција егзогених променљивих одвијала се у више итерација. У првом кораку, за сваку кандидат-променљиву тестирана је статистичка значајност у једноставном регресионом моделу. У другом кораку, променљиве су укључиване по редоследу статистичке значајности, уз проверу мултиколинеарности (*Variance Inflation Factor* –

VIF тест). У трећем кораку, финална спецификација оцењена је на основу *Akaike*-овог информационог критеријума (*AIC*) и *Bayes-Schwartz*-овог критеријума (*BIC*):

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k \quad (3.4)$$

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(n) \quad (3.5)$$

где је L максимална вредност функције веродостојности, k број параметара, а n број опсервација. Минимизација *AIC/BIC* критеријума обезбеђује оптималан баланс између прилагођености подацима и једноставности (парсимонијозности) модела.

3.1.4. Дијагностика резидуала модела *ARIMAX*

Валидност модела *ARIMAX* проверава се серијом дијагностичких тестова примењених на резидуалима $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$:

***Durbin-Watson* тест:** тестира присуство аутокорељације првог реда у резидуалима. $DW \approx 2$ указује на одсуство аутокорељације; $DW < 2$ сугерише позитивну, а $DW > 2$ негативну аутокорељацију. За *ARIMAX* (65,1,65,18) добијено је $DW = 2,02$, што је задовољавајуће.

***Ljung-Box Q* тест:** тестира $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ за све доцње до m . Неодбацивање H_0 потврђује да су резидуали бели шум, односно да је сва сезонска структура адекватно моделирана.

***Jarque-Bera* тест:** тестира нормалност дистрибуције резидуала на основу коефицијената асиметричности (*skewness*) и заобљености (*kurtosis*). Блага одступања од нормалности су уобичајена за високофреквентне финансијске серије.

***ARCH* тест:** тестира присуство условне хетероскедастичности, односно ситуације у којој варијанса грешака није константна кроз време. Присуство *ARCH* ефеката може захтевати проширење модела *GARCH* компонентом.

Сви дијагностички тестови потврђују адекватност спецификације модела *ARIMAX* (65,1,65,18): $DW = 2,02$ (без аутокорељације), Q тест не одбацује H_0 за доцње до 100, а дистрибуција резидуала је приближно симетрична, што потврђује да модел адекватно разуме сезонску структуру ГНО.

ARCH тест указује на статистички значајно присуство условне хетероскедастичности у резидуалима (F -статистика = 2,39, $p = 0,0049$); њен практични утицај на поузданост модела је ограничен. Томе доприноси и величина узорка од 711 опсервација, која обезбеђује довољну асимптотску основу за апсорпцију уоченог облика условне хетероскедастичности.

3.2. Модел *LSTM*

3.2.1. Архитектура *LSTM* ћелије

LSTM ћелија је основна градивна јединица рекурентних дубоких мрежа с механизмима у облику капија. У временском кораку t , уз улазни вектор x_t и претходно скривено стање h_{t-1} , *LSTM* ћелија рачуна (Дијаграм 1):

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (3.4)$$

Улазна капија или пролаз (Input gate): одређује које се нове информације уписују у ћелијско стање.

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (3.5)$$

Капија или пролаз заборав (Forget gate): одређује колики удео претходног ћелијског стања се задржава.

$$g_t = \tanh(W_g \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_g) \quad (3.6)$$

Ново ћелијско стање: нови кандидати, вредности за ажурирање меморије.

$$C_t = f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot g_t \quad (3.7)$$

Ажурирање стања ћелије: комбинација задржаних старих информација и нових кандидата.

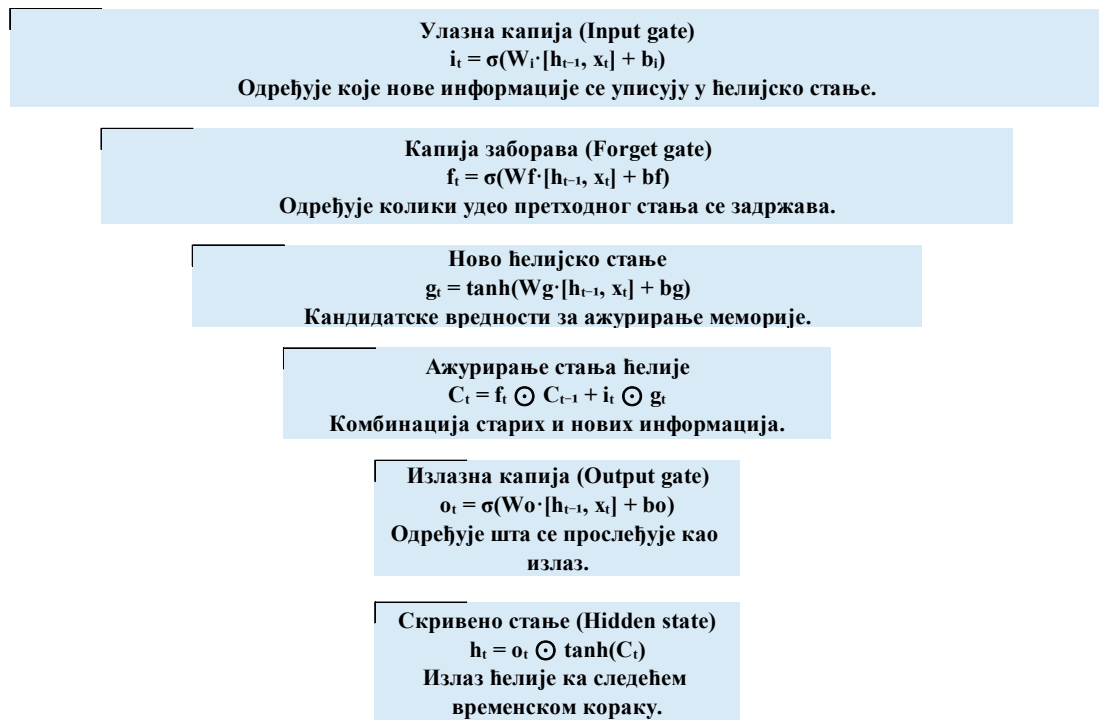
$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (3.8)$$

Излазна капија или пролаз (Output gate): одређује које информације из ћелијског стања се користе као излаз.

$$h_t = o_t \odot \tanh(C_t) \quad (3.9)$$

Скривено стање (Hidden state): излаз ћелије који се прослеђује следећем временском кораку.

где су: $\sigma(\cdot)$ – *sigmoid* функција; $\tanh(\cdot)$ – хиперболички тангенс; $\odot$ – елемент-wise (*Hadamard*) множење; W_f, W_i, W_g, W_o – матрице тежина капија; b_f, b_i, b_g, b_o – вектори пристрасности (*bias*).

Дијаграм 1. Архитектура *LSTM* ћелије

3.2.2. Густо повезани слојеви (*Dense*) и активационе функције

Након *LSTM* слојева, мрежа користи густо повезане (*Dense*) слојеве за нелинеарну трансформацију апстрахованих репрезентација:

$$a^{(l)} = f^{(l)}(W^{(l)} \cdot a^{(l-1)} + b^{(l)}) \quad (3.10)$$

где је $f^{(l)}$ активациона функција слоја l . За скривене *Dense* слојеве користи се *ReLU* (*Rectified Linear Unit*):

$$\text{ReLU}(z) = \max(0, z) \quad (3.11)$$

ReLU активација уводи нелинеарност без проблема нестајања градијената за позитивне вредности. За финални излазни слој који прогнозира промену ГНО – променљиву без ограничења на предзнак – користи се линеарна активација:

$$f^{(l)}(\text{излаз})(z) = z \quad (3.12)$$

3.2.3. *ElasticNet* регуларизација

$L1 + L2$ *ElasticNet* регуларизација модификује функцију губитка (*loss function*) додавањем пенала на пондере мреже:

$$L_{\text{total}} = L_{\text{MSE}} + \lambda_1 \sum |w_j| + \lambda_2 \sum w_j^2 \quad (3.13)$$

где је $L_{\text{MSE}} = (1/n) \sum (y_t - \hat{y}_t)^2$ средња квадратна грешка, $\lambda_1 = 0,0001$ (*L1 Lasso* пенал) и $\lambda_2 = 0,001$ (*L2 Ridge* пенал). *L1* пенал форсира ретка решења (свођење неважних

параметара на нулу), док $L2$ пенал смањује амплитуде свих параметара и тиме повећава стабилност модела.

3.2.4. Прозорски механизам и итеративна прогноза

Модели $LSTM$ примењују клизећи прозор (*sliding window*) дужине T_w за структурирање улазних података:

$$X_t^{(window)} = [x_{t-T_w+1}, x_{t-T_w+2}, \dots, x_t] \quad (3.14)$$

где је $T_w = 30$ радних дана за Моделе 1–3, тј. $T_w = 20$ за Модел 4. Сваки узорак у тренинг скупу јесте секвенца од T_w узастопних опсервација, а излаз је прогноза за један корак унапред.

За дугорочну прогнозу примењује се итеративна (рекурентна) стратегија:

$$\hat{y}_{t+k} = f_{LSTM}([\hat{y}_{t+1}, \dots, \hat{y}_{t+k-1}, x_{t+k}]) \quad (3.15)$$

при чему се прогнозирана вредност из претходног корака користи као улаз за следећи корак. Ова стратегија је неопходна за прогнозирање у временском хоризонту до краја 2035. године, али је извор акумулације грешака на дугим хоризонтима.

3.2.5. Параметри евалуације

Перформансе модела мерене су следећим стандардним параметрима:

– коефицијент детерминације R^2 који показује колики проценат варијације промена ГНО је објашњено моделом.

$$R^2 = 1 - \Sigma(y_t - \hat{y}_t)^2 / \Sigma(y_t - \bar{y})^2 \quad (3.16)$$

$$\text{– средња апсолутна грешка (MAE)} = (1/n) \Sigma |y_t - \hat{y}_t| \quad (3.17)$$

$$\text{– корен средње квадратне грешке (RMSE)} = \sqrt{[(1/n) \Sigma (y_t - \hat{y}_t)^2]} \quad (3.18)$$

$$\text{– смер тачности предвиђања промена ГНО (Direction Accuracy)} = (1/n) \Sigma 1[\text{sgn}(y_t - y_{t-1}) = \text{sgn}(\hat{y}_t - y_{t-1})] \quad (3.19)$$

Параметри се израчунавају у процесу тренирања модела у којем модел аутоматски идентификује 80 потенцијалних периода који могу бити статистички значајни у прогнозирању дневних промена ГНО и у периоду тестирања модела у којем се врши селекција модела избором периода у којем су грешке прогнозе најниже. Период тренирања модела обухвата интервал од 31. 12. 2004. до 31. 12. 2024. године, а период тестирања је 2025. година.

$MAE\ gap$ и $RMSE\ gap$ представљају показатеље који мере колико модел има добре перформансе у периоду тестирања. $MAE\ gap$ и $RMSE\ gap$, као мере *overfitting*-а, дефинишу се као релативне разлике између тренинг и тест параметара:

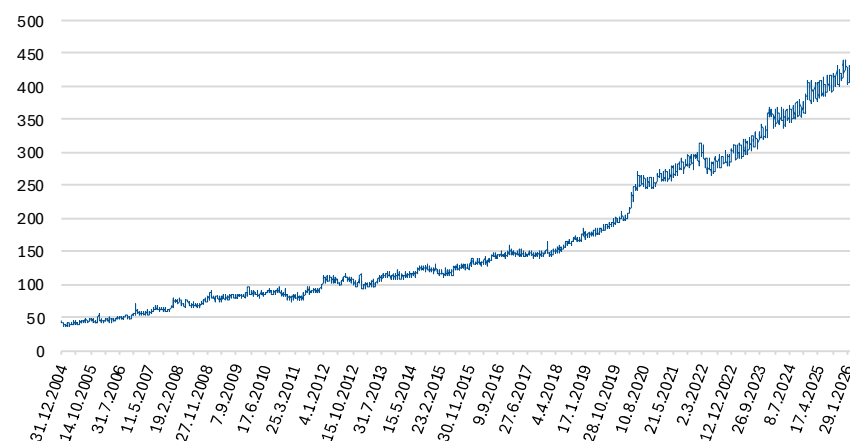
$$MAE_gap = (MAE_test - MAE_train) / MAE_train \times 100\% \quad (3.20)$$

4. Развијени модели и емпиријски резултати

4.1. Припрема података за анализу

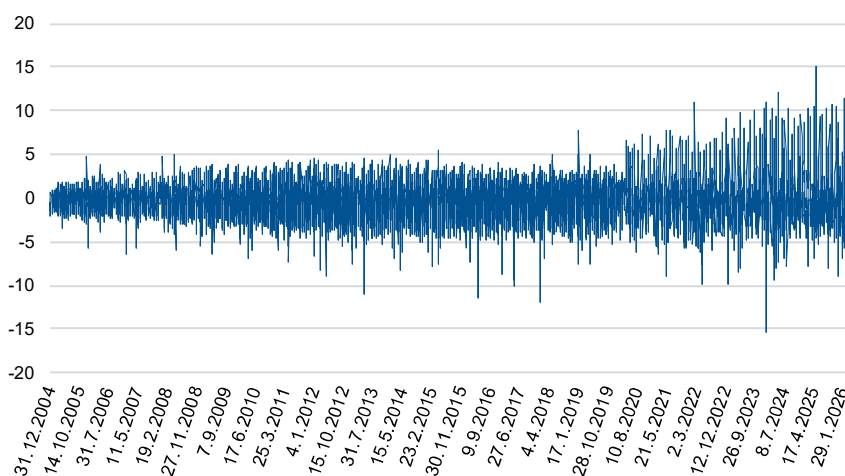
Анализа се заснива на временској серији дневних промена ГНО у периоду од 31. децембра 2004. до 26. јануара 2026. године – укупно 5.497 радних дана (опсервација).

Графикон 1. Готов новац у оптицају (дневна стања)
у млрд. RSD



Извор: НБС.

Графикон 2. Готов новац у оптицају (дневне промене)
у млрд. RSD



Извор: НБС.

Серија ГНО одликује се следећим статистичким својствима: средња вредност дневне промене блиска нули, стандардна девијација реда величине 2–3 милијарде динара, јака позитивна асиметрија (*skewness*) услед асиметричних децембарских и јануарских ефеката, и присуство вишеструких сезонских циклуса (5-дневни, ~22-дневни, ~65-дневни, 260-дневни).

Применом *ADF* теста стационарности потврђено је да дневне промене ГНО (Δy_t) јесу стационарне ($p < 0,01$), док је ниво ГНО интегрисан процес $I(1)$. У свим *LSTM*

моделима зависна променљива је стандардизована ($mean = 0$, $std = 1$) пре тренирања и денормализована (враћена на оригиналне вредности) при евалуацији.

4.2. Модел 1: $LSTM(128 \rightarrow 64 \rightarrow 16 \rightarrow I)$

4.2.1. Архитектура и параметри

Модел 1 је дубока неуронска мрежа типа $LSTM$, конструисана у архитектури левка с четири слоја, са укупно 200.500 тренираних параметара. Улазни простор обухвата 164 променљиве: 129 егзогених променљивих, 34 аутоматски генерисане сезонске променљиве и претходне вредности циљане променљиве. Прозорски механизам од 30 радних дана подразумева да свака опсервација у тренинг скупу има улазни тензор, димензија $[30 \times 164]$, односно структуру података која се прослеђује моделу као улаз за обраду и учење (Табела 1).

Табела 1. Архитектура и хиперпараметри Модела 1

Параметар	Вредност	Напомена
Архитектура слојева	$128 \rightarrow 64 \rightarrow 16 \rightarrow 1$	Левак; $LSTM + Dense$
Број параметара	200.500	74,8% у првом слоју
Прозорски механизам	30 радних дана	Клизећи прозор
<i>Dropout</i>	0,30	Између $LSTM$ слојева
Оптимизатор	Адам	$lr = 0,001$ (default)
<i>Batch</i> величина	16	Мање $\rightarrow$ боља генерализација
<i>EarlyStopping patience</i>	10 епоха	Монитор: val_loss , колико модел греша на новим подацима
Тренинг период (оптималан)	2. 3. 2006 – 31. 12. 2024	4.914 опсервација
Регуларизација	Само <i>Dropout</i>	Без L1/L2

У процесу тренирања, модел је применом клизног прозора дужине 30 радних дана аутоматски препознао 80 потенцијалних периода који би могли бити статистички значајни за прогнозирање промена ГНО. Од свих анализираних периода, модел је као оптималан издвојио онај у којем су грешке прогнозе у периоду тестирања (2025. година) најниже, односно у којем је коефицијент детерминације (R^2) највиши. Модел 1 препознаје период који почиње 2. марта 2006. као оптималан, са $R^2 = 0,9019$ на тренинг скупу.

4.2.2. Резултати и дијагностика

На тест скупу (261 опсервација, 2025. година) Модел 1 остварује $R^2 = 0,7745$ и $MAE = 1.329$ милиона динара, са смером промене (*Direction Accuracy*) = 82,3%, што указује на то да модел тачно прогнозира смер дневне промене ГНО у више од четири од пет

случајева (82%). Ово је уједно и највиши ниво тачности прогнозе смера дневних промена ГНО међу свим тестираним моделима.

Међутим, анализа *overfitting*-а открива значајан раскорак између тренинг теста и тест перформанси: *MAE gap* износи +162,5%, што далеко премашује гранични ниво од 20%. Модел је научио напамет историјске обрасце, укључујући специфичности шума у тренинг скупу, што га чини потенцијално нестабилним у дугорочним прогнозама.

Детаљни увид у месечне перформансе открива занимљиву хетерогеност: у осам од 15 анализираних месеци Модел 1 постиже R^2 изнад 0,75, док у преосталих седам месеци (углавном у јануару и децембру) бележи значајан пад. Ово је конзистентно с познатом особином *LSTM* модела – добра перформанса у редовним условима, али повишена осетљивост на структурне аномалије.

Интересантан је и налаз који се односи на грешку смера (*Direction Error*): од 261 прогнозираног дана, Модел 1 погрешно идентификује смер промене у 47 случајева (17,7%). Од тих 47 случајева, 31 (66%) јавља се у јануару и децембру, што додатно потврђује да су празнично-сезонски периоди кључни извор грешака свих модела (Табела 2).

Табела 2. Модел 1 – најважнији параметри

🔍 TRAIN vs TEST — OVERFITTING АНАЛИЗА						
Параметри	Train вредност	Test вредност	Разлика (Test – Train)	Разлика %	Статус	Тумачење
R^2	0,9019	0,7745	-0,1273	-14,12	OVERFIT	Мањи gap = бољи модел
MAE	506,2555	1328,7652	822,5097	162,47	OVERFIT	Већи тест MAE = нормално до 20%
RMSE	709,5949	1764,4323	1054,8375	148,65	OVERFIT	Већи тест RMSE = нормално до 20%
Direction Accuracy (%)	84,5177	82,3077	-2,21	-2,61	ОК	Разлика < 5 п.п. = ОК
Durbin-Watson	1,9565	1,7673	-0,1892	-9,67	ОК	Оба треба да су близу 2,0
Mean Bias	35,037	-213,7663	-248,8033	-710,12	ПАЗИ	Оба треба да су близу 0
Residual Std	708,7294	1751,4353	1042,7059	147,12	ПАЗИ	Тест std већи за макс. 30%
Pearson r	0,9531	0,8827	-0,0704	-7,39	ПАЗИ	Разлика < 0,05 = ОК
Theil U	0,1672	0,2566	0,0895	53,51	ОК	Оба треба < 0,5
ЗАКЉУЧАК: ✗ ЗНАЧАЈАН OVERFITTING-а – модел превише прилагођен train скупу						

4.3. Модел 2: *LSTM* (128→64→16→1) – други критеријум *overfitting*-а

Модел 2 дели идентичну архитектуру с Моделом 1 и постиже готово исте нумеричке перформансе. Једина разлика огледа се у критеријуму за класификацију *overfitting*-а: уместо *MAE gap* $\geq 20\%$, који категорички класификује модел као *overfitted*, Модел 2 примењује праг $\Delta R^2 < 0,15$ (Табела 3).

Табела 3. Модел 2 – критеријуми *overfitting*-а

Критеријум (ΔR^2)	Доња граница	Горња граница	Степен <i>overfitting</i> -а	Опис	Резултат (0,127)
$\Delta R^2 < 0,05$	0,00	< 0,05	Благо <i>overfitting</i>	Модел се добро генерализује, минимална разлика између тренинг теста и тест скупа	—
$\Delta R^2 < 0,15$	0,05	< 0,15	Умерен <i>overfitting</i>	Прихватљива разлика; модел има одређену тенденцију ка прекомерном прилагођавању	✓ 0,127
$\Delta R^2 \geq 0,15$	0,15	1,00	Значајан <i>overfitting</i>	Висока разлика; модел се превише прилагођава тренинг подацима, слаба генерализација	—

ЗАКЉУЧАК

$\Delta R^2 = 0,127 \rightarrow$ Умерен *overfitting* ($0,05 \leq \Delta R^2 < 0,15$) $\rightarrow$ Модел је прихватљив, али постоји простор за побољшање регуларизацијом.

Пошто је $\Delta R^2 = 0,127 < 0,15$, Модел 2 класификује се као умерен *overfitting*, што указује на то да избор параметара за мерење *overfitting*-а има суштински утицај на интерпретацију резултата (Табела 4).

Табела 4. Модел 2 – најважнији параметри

🔍 TRAIN vs TEST – OVERFITTING АНАЛИЗА						
Параметри	Train вредност	Test вредност	Разлика (Test – Train)	Разлика %	Статус	Тумачење
R^2	0,9019	0,7745	-0,1273	-14,12	OVERFIT	Мањи gap = бољи модел
MAE	506,2555	1328,7652	822,5097	162,47	OVERFIT	Већи тест MAE = нормално до 20%
RMSE	709,5949	1764,4323	1054,8375	148,65	OVERFIT	Већи тест RMSE = нормално до 20%
Direction Accuracy (%)	84,5177	82,3077	-2,21	-2,61	OK	Разлика < 5 п.п. = OK
Durbin-Watson	1,9565	1,7673	-0,1892	-9,67	OK	Оба треба да су близу 2,0
Mean Bias	35,037	-213,7663	-248,8033	-710,12	ПАЗИ	Оба треба да су близу 0
Residual Std	708,7294	1751,4353	1042,7059	147,12	ПАЗИ	Тест std већи за max 30%
Pearson r	0,9531	0,8827	-0,0704	-7,39	ПАЗИ	Разлика < 0,05 = OK
Theil U	0,1672	0,2566	0,0895	53,51	OK	Оба треба < 0,5
ЗАКЉУЧАК: X УМЕРЕН OVERFITTING – модел више прилагођен train скупу						

4.4. Модел 3: *LSTM* (128→64→16→1) са *ElasticNet* регуларизацијом

Модел 3 уводи $L1 + L2$ *ElasticNet* регуларизацију ($\lambda_1 = 0,0001$, $\lambda_2 = 0,001$) на густо повезане (*Dense*) слојеве, има идентичну архитектуру као Модели 1 и 2 и идентичан прозорски механизам од 30 радних дана. Регуларизација смањује амплитуде пондера, посебно на *Dense* слојевима, што директно сузбија тенденцију *overfitting*-а.

Регуларизација мења оптималну дужину тренинг периода: Модел 3 идентификује период од 12. јуна 2012. (3.276 опсервација) уместо периода од 2006. до 31. децембра 2024. године. Ово је конзистентно с теоријским очекивањем – регуларизовани модел може ефикасно учити и из краћег, али богатијег периода, без прекомерне зависности од удаљене историје.

Ефекти регуларизације су мерљиви и статистички значајни: ΔR^2 пада са 0,127 (Модел 1) на 0,056 (Модел 3), а MAE gap се смањује са 162,5% на 73,9%. Модел 3 постиже $R^2 = 0,7344$ и смер промене (*Direction Accuracy*) = 78,9% на тест скупу, уз побољшан *Durbin–Watson*-ов коефицијент 1,829 и симетричнију дистрибуцију резидуала (*skewness* = -0,100 наспрам +0,283 за Модел 1), што указује на квалитетније моделирање резидуалног шума (Табела 5).

Табела 5. Модел 3 – најважнији параметри

🔍 TRAIN vs TEST – OVERFITTING АНАЛИЗА						
Параметри	Train вредност	Test вредност	Разлика (Test – Train)	Разлика %	Статус	Тумачење
R^2	0,7899	0,7344	-0,0556	-7,03	ПАЗИ	Мањи gap = бољи модел
MAE	804,5368	1399,2087	594,6719	73,91	OVERFIT	Већи тест MAE = нормално до 20%
$RMSE$	1145,2979	1915,1021	769,8043	67,21	OVERFIT	Већи тест $RMSE$ = нормално до 20%
<i>Direction Accuracy</i> (%)	83,1433	78,8462	-4,2971	-5,17	ОК	Разлика < 5 п.п. = ОК
<i>Durbin–Watson</i>	1,9466	1,8291	-0,1175	-6,03	ОК	Оба треба да су близу 2,0
<i>Mean Bias</i>	-317,6571	-438,2904	-120,6333	-37,98	ОК	Оба треба да су близу 0
<i>Residual Std</i>	1100,3641	1864,2741	763,91	69,42	ПАЗИ	Тест std већи за макс. 30%
<i>Pearson r</i>	0,8978	0,8655	-0,0323	-3,6	ОК	Разлика < 0,05 = ОК
<i>Theil U</i>	0,2396	0,2787	0,0391	16,33	ОК	Оба треба < 0,5
ЗАКЉУЧАК: ХЗНАЧАЈАН OVERFITTING – модел превише прилагођен train скупу						

Посебно је вредан налаз да Модел 3, и поред нешто нижег укупног R^2 у односу на Моделе 1 и 2, остварује виши просечни $R^2 = 0,805$ у периоду фебруар–март 2026. То показује да регуларизација побољшава генерализацију управо тамо где је важно – на најновијим, досад невиђеним подацима. Ова карактеристика чини Модел 3 најпогоднијим *LSTM* кандидатом за будуће оперативно тестирање (Табела 10).

4.5. Модел 4: *LSTM* (64→32→8→1) – *anti-overfitting* архитектура

Модел 4 представља фундаментални редизајн архитектуре усмерен ка елиминацији *overfitting*-а применом девет истовремених *anti-overfitting* стратегија. Редукована мрежа (64→32→8→1) располаже са укупно 71.300 параметара – три пута мање од претходних модела. Свака од девет стратегија доприноси редукцији *overfitting*-а на различитом нивоу (Табела 6): (1) редукована архитектура 64→32→8→1, (2) *Batch Normalization* након оба *LSTM* слоја, (3) повећан *Dropout* на 0,45 (стандардни) и 0,10 (рекурентни), (4) *Dense Dropout* од 0,20, (5) појачана L1 + L2 регуларизација (десет пута јача од претходног модела), (6) *Gradient Clipping* (*clipnorm* = 1,0), (7) *Weight Decay* у *Adam* оптимизатору (*Adam W* ефекат), (8) већа величина групе – *batch*-а (32 неурона уместо 16 неурона) и (9) мањи прозорски механизам (*window size*) од 20 дана уместо 30 дана.

Табела 6. Модел 4 – *anti-overfitting* стратегије

9 Anti-Overfitting Стратегија		
1 АРХИТЕКТУРА	2 НОРМАЛИЗАЦИЈА	3 РЕГУЛАРИЗАЦИЈА
Редукована Архитектура 64 → 32 → 8 → 1	Batch Normalization Након оба LSTM слоја	Повећан Dropout 0.45 std · 0.10 rec
Смањење капацитета мреже ограничава могућност меморисања шума.	BatchNorm враћа вредности у нормалан опсег (~0). Стабилнији тренинг, мања шанса за overfitting.	Стандардни и рекурентни dropout за LSTM слојеве.
4 РЕГУЛАРИЗАЦИЈА	5 РЕГУЛАРИЗАЦИЈА	6 ОПТИМИЗАЦИЈА
Dense Dropout $p = 0.20$	L1 + L2 Регуларизација 10× јача од претходне	Gradient Clipping clipnorm = 1.0
Додатна регуларизација на густим слојевима. Агресивнији dropout би уништио мали сигнал.	Појачана пенализација великих пондера. Јача регуларизација → једноставнији модел.	Спречава експлозију градијената. Никад не мењати пондере за више од 1.0 у једном кораку.
7 ОПТИМИЗАЦИЈА	8 ПОДАЦИ	9 ПОДАЦИ
Weight Decay (AdamW) Adam + decay	Већи Batch Size 32 уместо 16	Мањи Window Size 20 уместо 30 дана
Директно смањује пондере. Модел остаје једноставан, што побољшава генерализацију.	Већи batch → стабилнији градијент и мање шума. Ефекат: модел мање 'скаче' → мањи overfitting.	Мањи прозор → мање информација → мање шансе да памти специфичне шумове.

Селекција модела уводи филтер: од 80 тестираних конфигурација, само 13 пролази филтер $MAE\ gap \leq 20\%$. Оптимална дужина тренинг периода је од 19. маја 2021. до 31. децембра 2024. године.

Одабрана конфигурација постиже $R^2 = 0,6651$, уз $\Delta R^2 = +0,033$ и $MAE\ gap = +26,2\%$, што потврђује да *anti-overfitting* стратегија постиже постављени циљ (Табела 7).

Табела 7. Модел 4 – најважнији параметри

🔍 TRAIN vs TEST – OVERFITTING АНАЛИЗА						
Параметри	Train вредност	Test вредност	Разлика (Test – Train)	Разлика %	Статус	Тумачење
R²	0,6979	0,6651	-0,0328	-4,7	ОК	Gap < 0.05 = одлично
MAE	1251,4888	1579,8329	328,3441	26,24	ПАЗИ	Тест MAE ≤ 20% > Train = ОК
RMSE	1758,9828	2150,2113	391,2285	22,24	ПАЗИ	Тест RMSE ≤ 20% > Train = ОК
Pearson r	0,857	0,8366	-0,0203	-2,37	ОК	Разлика < 0,05
Dir. Acc. (%)	74,026	70,7692	-3,2567	-4,4	ОК	Разлика < 5 п.п.
Residual Std	1758,9741	2131,5099	372,5358	21,18	ОК	Тест Std ≤ 30% > Train
Durbin-Watson	2,0616	1,6716	-0,39	-18,92	ОК	Оба ≈ 2,0
Theil U	0,3295	0,3454	0,016	4,85	ОК	Оба < 0,5
ЗАКЉУЧАК: ⚠ БЛАГИ OVERFITTING – модел нешто боље ради на train скупу						

Смањењем капацитета мреже деградиране су предиктивне перформансе: Модел 4 је конзистентно најслабији по свим параметрима тачности прогнозе (Табела 10).

4.6. Модел *ARIMAX* (65,1,65,18)

Модел *ARIMAX* развијен је на основу серије дневних промена ГНО у периоду од 3. јануара 2022. године до 23. септембра 2024. године (711 опсервација), која показује највиши статистички значај у прогнозирању дневних промена ГНО. Избор овог периода одражава процену да је динамика ГНО у периоду од 2022. године структурно стабилнија и релевантнија за краткорочну прогнозу у односу на старије податке који обухватају период пандемије вируса корона (Табела 3 у прилогу).

Спецификација модела резултат је итеративног процеса тестирања. Полазна тачка била је идентификација стационарности – *ADF* тест потврђује да су дневне промене ГНО (прва разлика) стационарне. Аутокореелограми (*ACF*) и парцијални аутокореелограми (*PACF*) указују на присуство сигнификантних аутокореелација на доцњама до 65 радних дана. Спецификацијом *AR*(65) и *MA*(65) компонената с диференцирањем првог реда добијен је модел *ARIMAX* (65,1,65,18).

Финални модел постиже $Adjusted R^2 = 0,76$, *Durbin–Watson*-ову статистику 2,02 и стандардну грешку регресије знатно испод стандардне девијације зависне променљиве, што потврђује високу предиктивну моћ (Табела 8).

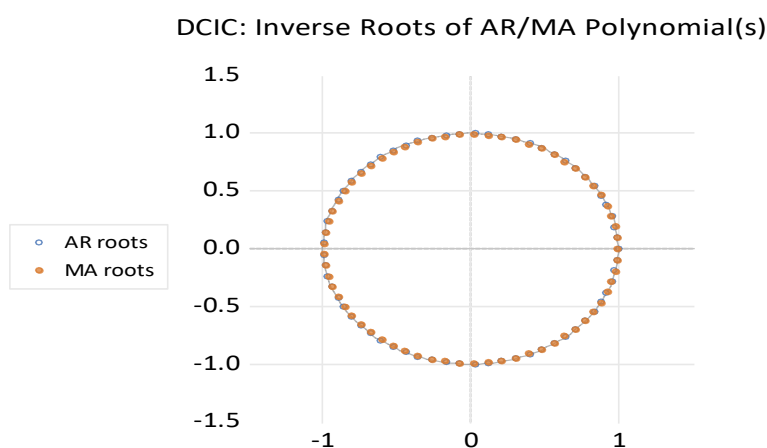
Иако *ARCH* тест потврђује статистички значајно присуство условне хетероскедастичности у резидуалима (F -статистика = 2,39, $p = 0,0049$), њен практични утицај на поузданост модела је ограничен. На то указује низак коефицијент детерминације *ARCH* тест регресије ($R^2 = 0,04$), који показује да се свега 4% варијабилности квадрата резидуала може статистички објаснити, док преостали део представља случајну компоненту коју модел не може да ухвати. Будући да је примарни циљ модела прогноза, а не статистичка инференца (тј. доношење закључака о целом скупу на основу узорка), присуство хетероскедастичности не утиче на то да процене параметара добијене методом максималне веродостојности постану систематски погрешне. Како се број опсервација повећава, оне се приближавају стварним вредностима параметара. Величина узорка од 711 опсервација обезбеђује довољну асимптотску основу за апсорпцију ученог облика условне хетероскедастичности (Табела 4 у прилогу).

Табела 8. *ARIMAX* (65,1,65,18) – сумарни показатељи квалитета модела

Статистика	Вредност	Интерпретација
<i>Adjusted R²</i>	0,76	76% варијансе ГНО објашњено
Стандардна грешка регресије	< S.D. зависне променљиве	Добра предиктивна моћ
<i>Durbin–Watson</i>	2,02	Без аутокореелације резидуала
Стационарност (AR инверзни корени)	Унутар јединичног круга	Модел је стабилан
Инвертибилност (MA инверзни корени)	Унутар јединичног круга	Модел је инвертибилан
Број параметара	18 егзогених + <i>AR/MA</i>	Једноставан модел

Сви AR и MA инверзни корени налазе се унутар јединичног круга, чиме се гарантују стационарност и инвертибилност модела (Графикон 3).

Графикон 3. **ARIMAX (65,1,65,18)** - Дијаграм AR и MA инверзних корена унутар јединичног круга



5. Упоредна анализа перформанси

5.1. Показатељи

Перформансе свих модела упоређене су на основу месечних вредности R^2 , MAE и $RMSE$ за период од јануара 2025. до марта 2026. године. Сваком моделу приписана је и категорија *overfitting*-а на основу ΔR^2 и $MAE\ gap$ -а, који квантификују разлику између тренинг и тест перформанси (Табела 9).

Табела 9. Сумарни показатељи перформанси свих модела – тест период (2025. година)

Модел	R^2 тест	MAE тест (млрд RSD)	ΔR^2	$MAE\ gap$	<i>Dir. Acc.</i>	<i>Overfitting</i>
ARIMAX (65,1,65,18) + експерт	0,790	1,353	Н/П	Н/П	Н/П	Н/П
Модел 1: LSTM 128→64→16→1	0,7745	1.329	0,127	+162,5%	82,3%	Висок
Модел 2: LSTM 128→64→16→1 (алт.)	≈ Модел 1	≈ Модел 1	0,127	+162,5%	≈ Модел 1	Умерен
Модел 3: LSTM 128→64→16→1 + ElasticNet	0,7344	1.399	0,056	+73,9%	78,9%	Умерен
Модел 4: LSTM 64→32→8→1 (anti-OF)	0,6651	Највиши	0,033	+26,2%	Најнижи	Низак

Напомена: Н/П – није применљиво на исти начин; *Dir. Acc.* – *Direction Accuracy*; *OF* – *overfitting*.

Модел *ARIMAX* (65,1,65,18), коригован експертском проценом, даје најбоље резултате прогнозе ГНО у периоду од јануара 2025. до марта 2026. године у односу на остале тестиране моделе. Коефицијент детерминације R^2 је највећи, док је *MAE* најнижа у поређењу са свим моделима, што указује на то да су прогнозиране вредности блиске оствареним.

Модели *LSTM* бележе слабије перформансе, првенствено због непредвиђене промене периода исплате пензија у јануару 2025. године, будући да ова промена није била заступљена у тренинг скупу и модели је нису могли научити (Табела 10).

Табела 10. Упоредни преглед перформанси свих модела

Месец	ARIMAX*			Модел 1			Модел 2			Модел 3			Модел 4		
	R^2	RMSE	MAE	R^2	RMSE	MAE	R^2	RMSE	MAE	R^2	RMSE	MAE	R^2	RMSE	MAE
Јан 25	0,698	1.634	1.263	0,000	3.119	2.013	0,014	3.048	1.968	0,045	3.162	1.980	0,007	2.937	2.122
Феб 25	0,766	2.107	1.666	0,851	1.723	1.505	0,851	1.727	1.507	0,841	1.740	1.457	0,789	2.219	1.579
Мар 25	0,812	1.601	1.173	0,832	1.539	1.260	0,832	1.540	1.258	0,882	1.198	877	0,791	1.672	1.249
Апр 25	0,828	1.658	1.297	0,865	1.546	1.203	0,864	1.549	1.205	0,868	1.483	1.237	0,839	1.754	1.322
Мај 25	0,851	1.978	1.470	0,919	1.523	1.194	0,920	1.519	1.191	0,830	1.994	1.300	0,771	2.795	1.801
Јун 25	0,748	1.906	1.564	0,874	1.397	1.145	0,875	1.395	1.142	0,830	1.632	1.301	0,825	1.793	1.449
Јул 25	0,757	1.859	1.319	0,854	1.461	1.171	0,854	1.462	1.173	0,880	1.321	1.066	0,884	1.513	1.256
Авг 25	0,811	1.615	1.239	0,820	1.457	1.107	0,795	1.490	1.151	0,799	1.549	1.220	0,772	1.696	1.318
Сеп 25	0,685	2.130	1.364	0,854	1.504	1.045	0,854	1.503	1.045	0,846	1.683	1.186	0,819	1.859	1.245
Окт 25	0,828	1.696	1.375	0,844	1.746	1.358	0,844	1.746	1.358	0,844	1.810	1.531	0,847	1.947	1.643
Нов 25	0,921	1.130	874	0,774	1.836	1.449	0,774	1.836	1.449	0,700	2.095	1.642	0,725	2.040	1.549
Дец 25	0,779	2.005	1.632	0,781	2.145	1.779	0,781	2.145	1.779	0,838	2.042	1.645	0,771	2.363	1.839
Јан 26	0,343	2.524	1.692	0,249	2.705	1.887	0,249	2.705	1.887	0,536	2.296	1.636	0,202	2.660	2.052
Феб 26	0,862	1.714	1.363	0,727	2.282	1.747	0,727	2.282	1.747	0,755	2.171	1.668	0,748	2.314	1.685
Мар 26	0,774	2.120	1.531	0,908	1.424	1.130	0,908	1.424	1.131	0,825	1.899	1.408	0,727	2.498	1.901
Просек Феб.25–Мар.26	0,769	1.860	1.397	0,797	1.735	1.356	0,795	1.737	1.359	0,805	1.780	1.370	0,751	2.080	1.563
Просек Јан.25–Мар.26	0,764	1.845	1.388	0,744	1.827	1.400	0,743	1.825	1.399	0,755	1.872	1.410	0,701	2.137	1.601

* ARIMAX модел коригован експертском проценом Зелено = најбоља вредност у реду Црвено = најслабија вредност у реду

Ако се из периода прогнозе искључи јануар 2025. године и посматра период од фебруара 2025. до марта 2026. године, сви *LSTM* модели осим Модела 4 имају боље перформансе у односу на *ARIMAX* (65,1,65,18). Највећи коефицијент детерминације R^2 има Модел 3 (*LSTM* 128→64→16→1 са *ElasticNet* $L1 + L2$ регуларизацијом). То показује да је додатна $L1 + L2$ *ElasticNet* регуларизација успела да смањи *overfitting* и побољша генерализацију, односно способност модела да добро функционише на новим, невиђеним подацима, а не само на онима на којима је трениран (Табела 10).

5.2. Месечна анализа перформанси

Анализа месечних вредности R^2 (Табела 10) открива значајне варијације перформанси свих модела током тестираног периода. Уочавају се три карактеристична обрасца понашања:

Јануар 2025. (структурни прелом): Сви *LSTM* модели бележе изражен пад перформанси ($R^2 \approx 0,3-0,5$) услед непредвиђене промене динамике исплате пензија. Модел *ARIMAX*, захваљујући експертском прилагођавању, показује већу отпорност ($R^2 = 0,698$), иако и он бележи слабије перформансе него у осталим месецима.

Фебруар 2025 – октобар 2025. (стабилан период): *LSTM* модели 1, 2 и 3 остварују перформансе упоредиве са моделом *ARIMAX* коригованим експертском проценом, а у појединим месецима (март, јун, септембар) и боље.

Новембар 2025. (специјални период): модел *ARIMAX* коригован експертском проценом остварује убедљиво најбољи коефицијент детерминације $R^2 = 0,921$. *LSTM* модели ($R^2 \approx 0,75-0,80$) заостају, јер им је теже да прогнозирају без експлицитних егзогених променљивих.

5.3. Анализа грешака

Код свих модела *RMSE* је знатно већи од *MAE*, што указује на присуство повремених великих грешака које су непропорционално пенализоване *RMSE* показатељем (Табела 10). Ови екстреми су пре свега повезани са:

- данима исплате пензија и плата, када проток готовог новца може бити вишеструко већи од просека;
- продуженим празничним периодима, нарочито током Божића;
- неочекиваним променама у фискалној политици, као што је измена календара исплате пензија у јануару 2025.

Моделима је заједничка и асиметрична дистрибуција резидуала с позитивним коефицијентима асиметрије, што указује да модели чешће потцењују раст ГНО него што га прецењују.

За све моделе анализирана је и аутокорељациона структура резидуала коришћењем *Durbin–Watson*-ове статистике. Модел *ARIMAX* коригован експертском проценом постиже $DW = 2,02$, што представља практично идеалан резултат. *LSTM* модели бележе DW вредности између 1,77 и 1,83, што указује на слабу позитивну аутокорељацију резидуала (Табела 2 у прилогу).

Табела 11. Предности и недостаци модела *ARIMAX* и *LSTM*

Аспект	<i>ARIMAX</i> модел	<i>LSTM</i> модели
Интерпретабилност	Висока: коефицијенти уз егзогене променљиве директно квантификују ефекте празника и сезоналности	Ниска: „црна кутија”; везе између променљивих су имплицитно кодиране у матрицама тежина
Сезоналност	Експлицитна: захтева дефинисање свих релевантних вештачких променљивих унапред	Аутоматска: модел сам идентификује сезонске обрасце из података
Структурне промене	Захтева ручно прилагођавање и експертску процену; реагује брже уз интервенцију	Реагује споро – нова промена мора бити у тренинг скупу да би је модел научио

Аспект	<i>ARIMAX</i> модел	<i>LSTM</i> модели
Дугорочна прогноза	Ограничена – параметри не еволуирају аутоматски; потребна периодична реестимација	Ризична за хоризонте > 2 године услед акумулације грешака у итеративној прогнози
Рачунарски захтеви	Минимални – брза естимација и евалуација, прикладна за оперативну употребу	Знатни – тренирање захтева <i>GPU</i> ресурсе; евалуација је брза
<i>Overfitting</i> ризик	Низак – модел је једноставан по конструкцији; статистичка селекција променљивих	Висок на кратким серијама – захтева пажљиву регуларизацију и валидирани тренинг процес
Развој и одржавање	Стандардизован процес; доступна литература; подршка у <i>Eviews/R/Python</i>	Захтева специјализована знања из области дубоког учења; комплекснији процес прилагођавања

6. Закључак

Овај рад даје систематичну компаративну анализу четири *LSTM* модела дубоког машинског учења и економетријског модела *ARIMAX* (65,1,65,18) за прогнозирање дневних промена ГНО коригованих експертском проценом. Анализа се заснива на временској серији од 5.497 дневних опсервација у периоду од 2004. до 2026. године, уз анализирани период од јануара 2025. до марта 2026. године. Истраживање даје пет кључних налаза.

Налаз 1 – супериорност модела *ARIMAX* у целокупном периоду. Модел *ARIMAX* коригован експертском проценом остварује супериорне перформансе у разматраном периоду: најнижи *MAE*, највиши укупни R^2 и робустност, добра прогноза у јануару 2025. године, периоду обележеном структурном променом у динамици исплате пензија.

Налаз 2 – конкурентност регуларизованог *LSTM*-а у стабилним периодима. *LSTM* Модел 3 са *ElasticNet* регуларизацијом постиже просечни $R^2 = 0,805$ у периоду од фебруара 2025. до марта 2026. године – већи од коефицијента детерминације (R^2) модела *ARIMAX*. У одсуству структурних промена, регуларизовани *LSTM* Модел 3 пружа веома добру прогнозу без експертског прилагођавања. Препорука: Модел 3 је најперспективнији кандидат за оперативно тестирање у фази паралелног праћења.

Налаз 3 – ефикасност регуларизације у контроли *overfitting*-а. *ElasticNet* регуларизација смањује ΔR^2 са 0,127 (Модел 1) на 0,056 (Модел 3) и побољшава *Durbin-Watson*-ов коефицијент са 1,77 на 1,83. Агресивна *anti-overfitting* архитектура (Модел 4) елиминише *overfitting* ($\Delta R^2 = 0,033$), али по цену предиктивне моћи ($R^2 = 0,6651$). Постоји оптимални ниво регуларизације између ова два екстрема који би требало систематски истраживати.

Налаз 4 – критичност дефиниције параметара *overfitting*-а. Модел 1 и 2, идентични по архитектури и нумеричким перформансама, класификују се различито у зависности од тога да ли се *overfitting* мери *MAE gap*-ом (Модел 1: висок *overfitting*) или ΔR^2 (Модел 2: умерен *overfitting*). Ова разлика у класификацији може бити пресудна за одлуку о оперативној примени модела.

Налаз 5 – комплементарност приступа и хибридни потенцијал. Модели *ARIMAX* и *LSTM* нису конкуренти, већ комплементарни приступи с различитим предностима и ограничењима. Модел *ARIMAX* пружа интерпретабилност, транспарентност и отпорност на структурне промене. Модел *LSTM* пружа аутоматско учење нелинеарних образаца и потенцијал за адаптивност, односно способност прилагођавања новим условима, променама или различитим ситуацијама.

Повећање броја опсервација, уз претпоставку одсуства значајних структурних промена, може даље унапредити перформансе *LSTM* модела.

Прилог: Детаљно поређење архитектура модела

Прилог даје детаљан технички преглед свих пет модела, с комплетним спецификацијама хиперпараметара, резултатима претраге оптималног тренинг периода и сумираним дијагностичким показатељима. Ове информације су намењене техничким корисницима који желе да репродукују или прилагоде развијене моделе.

Табела 1. Комплетна спецификација хиперпараметара свих *LSTM* модела

Хиперпараметар	Модел 1	Модел 2	Модел 3	Модел 4
Архитектура (<i>LSTM</i> → <i>Dense</i> → <i>out</i>)	128→64→16→1	128→64→16→1	128→64→16→1	64→32→8→1
Укупно параметара	200.500	200.500	200.500	71.300
<i>Dropout</i> (стандардни)	0,30	0,30	0,30	0,45
Рекурентни <i>Dropout</i>	–	–	–	0,10
<i>Dense Dropout</i>	–	–	–	0,20
<i>L1</i> регуларизација	–	–	0,0001	0,001
<i>L2</i> регуларизација	–	–	0,001	0,01
<i>Batch Normalization</i>	Не	Не	Не	Да
<i>Gradient Clipping</i>	–	–	–	1,0
<i>Window size</i> (дани)	30	30	30	20
<i>Batch</i> величина	16	16	16	32
Оптимизатор	Адам	Адам	Адам	<i>AdamW</i>
<i>EarlyStopping patience</i>	10	10	10	10
<i>OF</i> филтер при селекцији	$MAE\ gap \leq 20\%$	$\Delta R^2 < 0,15$	$MAE\ gap \leq 20\%$	$MAE\ gap \leq 20\%$
Оптималан тренинг старт	2. 3. 2006.	2. 3. 2006.	12. 6. 2012.	19. 5. 2021.
Број тренинг опсервација	4.914	4.914	3.276	945

Табела 2. Резултати претраге оптималног тренинг периода – сумарна статистика

Статистика претраге	Модел 1	Модел 2	Модел 3	Модел 4
Број тестираних конфигурација	80	80	80	80
Прошло <i>OF</i> филтер	N/A	53 ($\Delta R^2 < 0,15$)	N/A	13 ($MAE \leq 20\%$)
R^2 тренинг (одабрани модел)	0,9019	0,9019	0,8618	0,6984
R^2 тест (одабрани модел)	0,7745	0,7745	0,7344	0,6651
ΔR^2 (тренинг – тест)	0,127	0,127	0,056	0,033
<i>MAE gap</i> (%)	+162,5%	+162,5%	+73,9%	+26,2%
<i>Durbin-Watson</i> (тест резидуала)	1,774	1,774	1,829	1,801
<i>Skewness</i> резидуала	+0,283	+0,283	–0,100	+0,147

Табела 3. **ARIMAX (65,1,65,18)**

Dependent Variable: DCIC

Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)

Date: 02/21/25 Time: 13:46

Sample: 1/03/2022 9/23/2024

Included observations: 711

Convergence achieved after 31 iterations

Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
W10	-622.8686	259.1914	-2.403122	0.0165
TW1	10127.95	1636.893	6.187302	0.0000
MT3	1948.424	755.0318	2.580585	0.0101
MT2	4584.982	837.0957	5.477250	0.0000
EH_2A	-2478.763	571.2319	-4.339329	0.0000
W48	3460.174	561.9205	6.157764	0.0000
EH_1A	-6688.144	2641.319	-2.532123	0.0116
MT4	-9082.940	1516.119	-5.990914	0.0000
W1	-1141.472	550.1693	-2.074765	0.0384
SECONDW	572.8555	348.7151	1.642761	0.1009
NY_1A	-7287.528	949.1455	-7.677988	0.0000
WT1	2641.636	1284.037	2.057289	0.0400
WT4	-3694.829	1686.075	-2.191378	0.0288
TW4	-6157.223	3678.150	-1.674000	0.0946
NY_4A	-2478.705	769.3149	-3.221965	0.0013
NY_5A	-3411.392	1460.454	-2.335844	0.0198
CHR_2A	3358.348	1512.940	2.219749	0.0268
W6	1052.604	277.8336	3.788614	0.0002
AR(45)	0.169553	0.015234	11.12981	0.0000
AR(65)	0.777811	0.017361	44.80256	0.0000
AR(1)	0.077832	0.015160	5.134141	0.0000
AR(2)	-0.109737	0.014551	-7.541568	0.0000
AR(22)	0.081253	0.013115	6.195303	0.0000
MA(64)	-0.073675	0.030963	-2.379487	0.0176
MA(65)	-0.586921	0.034954	-16.79116	0.0000
MA(43)	0.076906	0.028518	2.696732	0.0072
MA(44)	0.130228	0.029151	4.467349	0.0000
SIGMASQ	2539056.	102895.7	24.67600	0.0000
R-squared	0.765310	Mean dependent var	101.6203	
Adjusted R-squared	0.756032	S.D. dependent var	3291.504	
S.E. of regression	1625.775	Akaike info criterion	17.72566	
Sum squared resid	1.81E+09	Schwarz criterion	17.90551	
Log likelihood	-6273.474	Hannan-Quinn criter.	17.79513	
Durbin-Watson stat	2.021595			

Табела 4. Тест хетероскедастичности: *ARCH*

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	2.392522	Prob. F(12,686)	0.0049
Obs*R-squared	28.07917	Prob. Chi-Square(12)	0.0054

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 06/20/26 Time: 17:01

Sample (adjusted): 1/19/2022 9/23/2024

Included observations: 699 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2314059.	342482.5	6.756722	0.0000
RESID^2(-1)	0.145720	0.038164	3.818236	0.0001
RESID^2(-2)	0.075450	0.038568	1.956270	0.0508
RESID^2(-3)	-0.032200	0.038671	-0.832683	0.4053
RESID^2(-4)	-0.031701	0.038596	-0.821363	0.4117
RESID^2(-5)	-0.007807	0.038605	-0.202229	0.8398
RESID^2(-6)	0.034927	0.038599	0.904868	0.3659
RESID^2(-7)	0.019319	0.038600	0.500481	0.6169
RESID^2(-8)	0.021279	0.038609	0.551134	0.5817
RESID^2(-9)	-0.069998	0.038598	-1.813531	0.0702
RESID^2(-10)	-0.012271	0.038666	-0.317374	0.7511
RESID^2(-11)	-0.016229	0.038564	-0.420839	0.6740
RESID^2(-12)	-0.029133	0.038162	-0.763406	0.4455
R-squared	0.040170	Mean dependent var	2564340.	
Adjusted R-squared	0.023380	S.D. dependent var	5099925.	
S.E. of regression	5039953.	Akaike info criterion	33.72211	
Sum squared resid	1.74E+16	Schwarz criterion	33.80673	
Log likelihood	-11772.88	Hannan-Quinn criter.	33.75483	
F-statistic	2.392522	Durbin-Watson stat	1.997415	
Prob(F-statistic)	0.004949			

Литература

- Abadi, M., Barham, P., Chen, J., Chen, Z., Davis, A., Dean, J., ... Zheng, X. (2016). TensorFlow: A system for large-scale machine learning. *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI 2016)*, 265–283.
- Alex Martelli, Anna Martelli Ravenscroft, Steve Holden and Paula McGuire (2023). Python за програмере.
- Sebastian Raschka i Vahid Mirjalili (2020). Python машинско учење.
- Sebastian Raschka, Yuxi (Hayden) Liu i Vahid Mirjalili (2022). Машинско учење PyTorch и Scikit-Learn.
- Bindseil, U., Camba-Mendez, G., Hirsch, A., Weller, B. (2004). Excess reserves and the implementation of monetary policy of the ECB. *ECB Working Paper Series*, No. 361. European Central Bank.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th edition. John Wiley & Sons.
- Chollet, F. (2018). *Deep Learning with Python*. Manning Publications.
- Diebold, F.X., Mariano, R.S. (1991). Comparing predictive accuracy.
- Fischer, T., Krauss, C. (2017). Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions.
- Gal, Y., Ghahramani, Z. (2016). Dropout as a Bayesian approximation.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
- Hochreiter, S., Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780.
- Ioffe, S., Szegedy, C. (2015). Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift.
- Kingma, D.P., Ba, J. (2015). Adam: A method for stochastic optimization.
- Lim, B., Arik, S.Ö., Loeff, N., Pfister, T. (2021). Temporal Fusion Transformers for interpretable multi-horizon time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 37(4), 1748–1764.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- Makridakis, S., Spiliotis, E., Assimakopoulos, V. (2018). Statistical and Machine Learning forecasting methods: Concerns and ways forward. *PLOS ONE*, 13(3), e0194889.
- Srivastava, N., Hinton, G., Krizhevsky, A., Sutskever, I., Salakhutdinov, R. (2014). Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting. *Journal of Machine Learning Research*, 15, 1929–1958.
- Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A.N., Kaiser, L., Polosukhin, I. (2023). Attention is all you need.
- Whitesell, W. (2006). Interest rate corridors and reserves. *Journal of Monetary Economics*, 53(6), 1177–1195.
- Zhang, G.P. (2003). Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 50, 159–175.
- Zou, H., Hastie, T. (2005). Regularization and Variable Selection via the Elastic Net.

Скраћенице

Скраћеница/Појам	Дефиниција
ГНО	Готов новац у оптицају – укупна вредност новчаница и кованог новца у оптицају
ARIMAX	<i>AutoRegressive Integrated Moving Average with exogenous variables</i> – проширени модел <i>ARIMA</i> са егзогеним променљивима
LSTM	<i>Long Short-Term Memory</i> – тип рекурентне неуронске мреже са механизмима капија за задржавање дугорочних зависности
ReLU	<i>Rectified Linear Unit</i> – активациона функција: $f(x) = \max(0, x)$
Dropout	Регуларизациона техника: насумично искључивање неурона током тренирања ради превенције <i>overfitting-a</i>
ElasticNet	Комбинована L1 + L2 регуларизација која истовремено форсира ретка решења и смањује амплитуде параметара
Overfitting	Преприлагођавање модела тренинг подацима; модел добро описује историјске податке, али лоше генерализује на нове
R²	Коефицијент детерминације: удео објашњене варијансе зависне променљиве ($0 \leq R^2 \leq 1$)
MAE	<i>Mean Absolute Error</i> – средња апсолутна грешка прогнозе
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i> – корен средње квадратне грешке; пенализује веће грешке, то значи да веће грешке имају већи утицај, односно велика одступања се више кажњавају
Direction Accuracy	Удео случајева у којима модел тачно прогнозира смер промене (раст/пад)
Batch Normalization	Нормализација активација по <i>mini-batchu</i> (мања група података); стабилизује тренинг дубоких мрежа
EarlyStopping	Механизам раног заустављања тренирања када се грешка на валидационом скупу не побољшава током <i>patience</i> епоха. Означава колико епоха модел сме да не напредује пре него што се тренинг заустави.
Window size	Дужина клизећег прозора (број узастопних дана) који се користи као улаз у <i>LSTM</i> модел
Dense слој	Густо повезан слој неуронске мреже (<i>Fully Connected Layer</i>) То значи да је сваки неурон повезан са свим неуронима из претходног слоја.