
ПОРЕЂЕЊЕ МОДЕЛА *MIDAS* И *LSTM* ЗА ПОТРЕБЕ ТЕКУЋЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ БРУТО ДОМАЋЕГ ПРОИЗВОДА

Ива Глишић

© Народна банка Србије, март 2024.

Доступно на www.nbs.rs

За ставове изнете у радовима у оквиру ове серије одговоран је аутор и ставови не представљају нужно званичан став Народне банке Србије.

Сектор за економска истраживања и статистику

НАРОДНА БАНКА СРБИЈЕ

Београд, Краља Петра 12

Тел.: (+381 11) 3027 100

Београд, Немањина 17

Тел.: (+381 11) 333 8000

www.nbs.rs

Поређење модела *MIDAS* и *LSTM* за потребе текуће пројекције бруто домаћег производа

Ива Глишић

Апстракт: Главна тема овог рада јесте представљање метода машинског и дубоког учења, као и регресионих модела података мешовитих фреквенција, ради предвиђања текућег кретања БДП-а. Циљ рада је одабир адекватног модела који на коришћеним подацима показује боље перформансе. Рад даје одговор на питање да ли се употребом метода дубоког учења могу унапредити текуће пројекције БДП-а у поређењу с традиционалним економетријским методама, као и да ли употреба одређених високофреквентних индикатора побољшава квалитет коришћених модела. У раду је обрађено питање одабира адекватних индикатора – и званичних, и оних из алтернативних извора, представљен је оквир регресионих модела мешовитих фреквенција и модела дубоког учења који се користе за текуће прогнозе, уз оцену два таква модела на примеру српског БДП-а. Моделован је БДП Србије за период Т1 2016 – Т2 2023, а крај посматраног периода (шест тромесечја) коришћен је за прогнозу. Коначно, упоређена су два оцењена модела, регресиони модел података мешовитих фреквенција и неуронска мрежа *LSTM*, а посебан акценат у раду био је на начинима побољшања оба модела. Мању грешку прогнозе, уз коришћење комбинације званичних и алтернативних (високофреквентних) индикатора, имао је модел рекурентне неуронске мреже *LSTM*, али се и регресиони модел података мешовитих фреквенција показао као добар алат доносиоцима одлука, будући да његова структура омогућава увид у текућа кретања која су детерминисала динамику БДП-а. Коришћење алтернативних индикатора у текућој пројекцији побољшало је пројекције путем оба представљена модела.

Кључне речи: БДП, текућа прогноза, *MIDAS*, неуронске мреже, високофреквентни индикатори.

[JEL Code]: C32, C45, C53

Нетехнички резиме

Модели који се користе за добијање брзих процена о макроекономским варијаблама или укупном стању економске активности добијају на значају у последњим годинама, а посебно у периодима великих криза, када је поуздана информација о интензитету ефекта одређене појаве или мере веома значајна за привредну активност. Оваква врста моделовања везује се за појам текућих пројекција (енгл. *nowcasting*), које управо служе за добијање прве процене о некој економској варијабли када званичан податак још увек није доступан. Једна од посебно корисних варијабли за процењивање методом текуће пројекције јесте БДП. Иако није без недостатака, БДП пружа најкомплетнију слику о стању економске активности у неком тренутку. Један од недостатака је свакако доцња у објављивању податка за текући временски период, ако се има у виду да је прва званична процена кретања БДП-а доступна месец дана након завршетка референтног тромесечја, при чему званична процена о кретању БДП-а током самог тромесечја не постоји. Модели који се користе за текућу прогнозу управо за циљ имају да превазиђу ове недостатке.

Једно од главних питања која се постављају приликом оцењивања оваквих модела јесте питање релевантних индикатора који на адекватан начин могу апроксимирати кретање БДП-а. Индикатори који су повољни за коришћење у овим моделима морају бити високо корелисани са индикатором БДП-а, али и учесталији и редовнији у објављивању. Управо због потребе за симултаним коришћењем података који имају различите фреквенције развијени су регресиони модели података мешовитих фреквенција – модели *MIDAS*. Поред њих, у економетријској анализи често се користе и динамички факторски модели (*DFM*), као и њихове комбинације.

Због потребе за што прецизнијом проценом кретања економске активности, у литератури и пракси је, поред званичних, све учесталије коришћење алтернативних индикатора. Алтернативни индикатори су најчешће *big data* подаци и, као такви, другачије су структурирани и најчешће значајно учесталији и благовременији од званичних. Ипак, рад с таквим подацима уводи нове комплексности у модел, а један од одговора на растућу компутативну комплексност оваквих модела јесте све чешће коришћење машинског учења, а посебно дубоког учења у сврху текуће пројекције.

У раду су оцењена два модела текуће пројекције – *MIDAS* и *LSTM*, од којих је први традиционални економетријски модел, а други модел дубоког учења. Модел су оцењивани коришћењем комбинације званичних и алтернативних индикатора као регресора, при чему је циљна варијабла за пројекцију био раст БДП-а. Оба модела на адекватан начин моделују динамику БДП-а на кратак рок, при чему се модел неуронске мреже *LSTM* показао као прецизнији, али и тежи за оцењивање и интерпретацију од модела *MIDAS*. Поред тога, будући да модел *LSTM* не пружа увид у појединачне доприносе коришћених варијабли, модел *MIDAS* је знатно кориснији у идентификацији окидача за промене БДП-а. Такође, увидом у структуру модела *MIDAS* може се закључити да су алтернативни индикатори статистички значајни за текуће пројекције БДП-а. Због коришћења алтернативних индикатора и природе макроекономских података, оба модела имају проблем малих узорака и последично прекомерног прилагођавања подацима, а с порастом базе података очекује се и да ће перформансе оба оцењена модела, а посебно модела дубоког учења, бити све боље.

Садржај:

1. Увод	10
2. Избор адекватних варијабли за потребе текуће прогнозе бруто домаћег производа	11
2.1. Званични месечни индикатори статистичког завода	12
2.2. Високофреквентни индикатори	14
2.2.1. Индикатор Гуглових трендова	15
2.2.2. Потрошња електричне енергије	16
2.3. Трансформација коришћених варијабли и провера стационарности и мултиколинеарности	17
3. Економетријски модел коришћен за текућу прогнозу.....	18
3.1. Преглед литературе.....	19
3.2. Теоријски оквир регресивних модела мешовитих фреквенцијских података	20
3.3. Оцена регресионог модела података мешовитих фреквенција.....	23
4. Модели машинског учења у економетрији	28
4.1. Неуронске мреже.....	30
4.1.1. Неуронске мреже <i>LSTM</i>	33
4.2. Оцена модела <i>LSTM</i>	34
5. Закључна разматрања.....	36
Литература	39

1. Увод

„Економиста је стручњак који ће сутра објаснити зашто се ствари које је предвидео јуче данас нису десиле.”

Лоренс Ц. Питер

Економска прогноза није егзактна наука, нити је увек најпрецизнија у резултатима истраживања, на шта алудира цитат с почетка овог рада. Неизвесност и разни ризици утичу на вероватноћу остварења пројектованог кретања одређене макроекономске варијабле. Што је дужи хоризонт предвиђања, пројекције су непоузданије, а исто важи и када је неизвесност висока, као што је случај у кризним периодима, када су, по правилу, макроекономске пројекције најпажљивије посматране и праћене. У кризним периодима, праћење званичних индикатора економске активности и њихових пројекција указује на вероватноћу продубљивања актуелне кризе или пак изласка из ње.

Проласком кроз кризу изазвану пандемијом вируса корона, која је непосредно праћена кризом изазваном ратом у Украјини, постало је евидентно да велики број индикатора економске активности није благовремен, што додатно отежава процес доношења одлука о адекватним мерама зарад очувања стабилног економског окружења. То је посебно тачно за индикатор економске активности у виду БДП-а, будући да су први ефекти ширења вируса корона на економску активност забележени већ у јануару (у виду транспортних проблема), док је индикатор БДП-а то потврдио тек крајем априла или почетком маја у највећем броју држава. Стога, значајна пажња у овом периоду усмерена је на моделе који се користе за тзв. текућу пројекцију БДП-а (енгл. *nowcasting*). Ови модели су већ дуги низ година део економске литературе, али посебно бивају корисни у време наглих заокрета економске активности, будући да дају брзу процену тренутног ефекта на БДП.

Приликом оцене модела који за циљ имају процену тренутног нивоа БДП-а, неопходно је адекватно одабрати објашњавајуће варијабле које ће бити садржане у моделу. Већ приликом одабира варијабли јављају се два проблема, од којих се први односи на то што велики број званичних индикатора чије је кретање корелисано с кретањем БДП-а такође има извесну доцњу у објављивању. Други проблем је то што се највећи број тих индикатора исказује у фреквенцији (најчешће месечно) која се разликује од тромесечног податка о БДП-у.

Текуће прогнозе се често ослањају на податке високе фреквенције, као што су дневни или недељни индикатори, како би се моделовала стварна економска активност у реалном времену. Прво поглавље овог рада управо се бави проблематиком одабира адекватних индикатора – и званичних, и оних из алтернативних извора, који готово по правилу имају краћу доцњу између завршетка референтног периода и објављивања прве процене резултата у датом периоду. Друго поглавље тиче се традиционалних економетријских метода који се фокусирају управо на решавање проблема различитих фреквенција зависне и објашњавајућих променљивих. У другом поглављу биће представљен оквир регресионих модела мешовитих фреквенција (*MIDAS*), уз оцену једног таквог модела на примеру српског БДП-а.

У значајном делу литературе представљене у раду аутори се осврћу на све већи број доступних економских индикатора које није објавио званични статистички завод неке државе. Експоненцијални раст доступности огромне количине података везује се за појам *big data* и односи се на велике, комплексне и разнолике скупове података који се генеришу из различитих извора. Ови подаци се генеришу великом брзином, обимни су (велика количина података) и разноврсни су (различити формати и типови података). Осим што се овакви подаци могу укључити у традиционалне економетријске моделе, њихово коришћење је пре свега присутно у различитим моделима машинског учења, а посебно подсегмента дубоког учења (енгл. *deep learning*). Треће поглавље односи се на развој и примену машинског учења у економетрији, с посебним освртом на моделе дубоког учења који се користе за текуће прогнозе. У овом поглављу такође је оцењен модел дубоког учења, тачније једне врсте рекурентне неуронске мреже. Неуронска мрежа се састоји од повезаних чворова односно неурона. Ови чворови сачињавају слојеве, укључујући улазни слој, један или више скривених слојева и излазни слој. Подаци теку кроз слојеве, активирајући функције у оквиру сваког неурона чији излази дају инпут о даљем коришћењу податка. Рекурентне мреже дозвољавају комуникацију која није искључиво једносмерна између слојева и чворова мреже. У раду је коришћена неуронска мрежа *LSTM* (енгл. *long short-term memory*), која је посебно погодна за моделовање временских серија ради текуће прогнозе БДП-а Србије.

У последњем, четвртом поглављу поређена су два оцењена модела за текућу прогнозу БДП-а, регресионог модела података мешовитих фреквенција и неуронске мреже *LSTM*, уз посебан осврт на начине побољшања коришћених модела.

Циљ рада јесте одабир адекватног скупа индикатора – и из званичних, и из алтернативних извора, за потребе проналажења оптималног модела за текућу прогнозу БДП-а Србије.

2. Избор адекватних варијабли за потребе текуће прогнозе бруто домаћег производа

Републички завод за статистику, као главни произвођач и дисеминатор статистичких података, објављује велики број саопштења, индикатора, билтена и сличних прегледа. Дуги низ година ово су били једини доступни подаци за потребе економске анализе и макроекономских пројекција. С временом придружили су се и различите мере сентимента и анализе субјективних очекивања економских субјеката (попут индикатора инфлационих очекивања и индекса *ESI*).

Осим индикатора који су базирани на анкетама, с појавом интернета појавио се и велики број индикатора који су постали доступни кроз интеракцију корисника са интернет страницама. Пример за то представљају индикатори претрага на интернет претраживачу Гугл, који ће бити коришћени у овом раду. За време пандемије вируса корона веома значајно је било праћење индекса *Google mobility*, који приказује трендове и промене у кретањима у одређеним регионима. Тема од посебног интереса у овом периоду када је у питању економска анализа био је утицај рестрикција уведених зарад спречавања ширења вируса на економску активност. *Ilin et al.* (2021) показали су да се

индикатори мобилности (попут Гугловог) могу користити за процену ефикасности нефармацеутских интервенција, као и предвиђање ширења вируса корона. Они су пронашли да су сами подаци о мобилности довољни за предвиђање инфекција вирусом корона на свим географским скалама – од округа и градова, преко држава и провинција, до земаља и на крају целог света. Поред тога, модели који искључују податке о мобилности имају знатно лошије перформансе, што указује на важну улогу података о мобилности као високофреквентног и алтернативног извора података у предвиђању.

У овом раду за потребе пројектовања БДП-а у кратком року и израду текуће прогнозе биће предложена четири званична месечна индикатора и пет алтернативних, високофреквентних индикатора.

2.1. Званични месечни индикатори статистичког завода

Циљ овог рада јесте проналажење најадекватнијег модела за потребе текуће и краткорочне прогнозе БДП-а. Најчешће коришћен индикатор економске активности јесте БДП, будући да представља укупну вредност свих добара и услуга произведених унутар граница земље током одређеног периода (обично годину дана).

У Србији, према производном приступу, највећи део БДП-а чини сектор услуга (51% у просеку у периоду 2016–2022), а затим сектор индустрије, који чини око 21% укупног БДП-а. Највећи део БДП-а из угла расхода чини лична потрошња, око 70% у просеку у периоду 2016–2022, док су приватне инвестиције у датом периоду чиниле око 16%, а државне око 5% у просеку. Нето извоз је под великим утицајем екстерних фактора, пре свега цене енергената и житарица, а условљен је и екстерном тражњом највећег трговинског партнера Србије – земаља Европске уније, а пре свега Немачке. У последњих седам година у свим годинама са изузетком 2016. нето извоз је забележио негативан допринос укупном БДП-у, и то у просеку –1,2 процентна поена.

БДП је кључни индикатор који користе владе, креатори политика, предузећа и економисти за праћење и анализу економских резултата и напретка земље. Као такав, има велики пондер у одлучивању о адекватности тренутних и смеру будућих економских политика, али и креирању економског сентимента. Завод за статистику први, прелиминарни податак о тромесечном остварењу БДП-а (тзв. брзу процену) објављује месец дана по завршетку референтног тромесечја (нпр. брза процена о остварењу у првом тромесечју објављује се последњег дана априла). Суштински, то би значило да се прва процена о стању привреде добија тек на крају четвртог месеца. С обзиром на значај овог индикатора, у економској литератури деценијама уназад улажу се велики напори за оцену модела који ће на адекватан начин предвидети кретање БДП-а у кратком року, али и оценити тренутно стање (текућа прогноза).

Статистички завод прикупља податке о индустријској производњи, трговини на мало и извозу и увозу робе на месечном нивоу. Први подаци о кретањима ових индикатора доступни су последњег дана у месецу који следи референтни месец (крајем фебруара за јануарско остварење). Чињеница да су ови подаци фреквентнији и ажуриранији од индикатора економске активности чини их погодним за процену

кретања укупног БДП-а, ако се покаже да они имају предиктивну моћ. Део овог рада бавиће се одабиром оптималног скупа индикатора за предвиђање динамике БДП-а.

Веза између индустријске производње и укупног кретања економске активности већ дуго је предмет истраживања. Ова веза била је посебно јака у периодима када је највећи део додате вредности управо и чинила она произведена у индустријском сектору, пре него што је примат преузео сектор услуга. Ипак, будући да велики број шокова који погађа индустријску производњу, како домаћих тако и екстерних, утиче и на економску активност у целини, динамика кретања овог индикатора и даље може пружити увид у кретање целокупне економске активности.

Stock & Watson (1988) су још осамдесетих година прошлог века оценили динамички факторски модел како би добили индекс који представља кретање укупне економске активности, а за потребе конструисања индекса коришћени су подаци о индустријској производњи, стварном личном доходу, производњи у прерађивачкој индустрији, трговини и запослености.

Посебно је занимљиво истраживање које је 2007. спровела ЕЦБ, а које се тиче утицаја доцње између завршетка референтног периода и објаве прве процене кретања индикатора. Када се занемаре разлике у кашњењу објављивања, закључили су да су подаци о стварним активностима (посебно индустријска производња) најважнији извор информација. Међутим, када се узме у обзир њихово мање благовремено објављивање, подаци о стварним активностима постају много мање релевантни, а њихово место заузимају анкетни подаци. У веома касним прогнозама БДП-а, које су рађене у последњем месецу одговарајућег тромесечја и након тога, подаци о индустријској производњи још увек садрже значајне информације (*Bańbura & Rűnstler, 2011*).

Интересантан је и рад ФЕД-а из Даласа, који при оцењивању модела не узима у обзир појединачно брзу процену или коначан податак о индикаторима економске активности, већ њихову комбинацију, као и разлику насталу ревизијом наведених података. Поента је илустрована моделом који користи месечну индустријску производњу, запошљавање и малопродају (*Koenig et al., 2003*).

У поменутих радовима *Stock & Watson* (1988), као и *Koenig et al.* (2003), поред индикатора индустријске производње коришћен је и индикатор трговине на мало за потребе оцене кретања укупне економске активности.

Занимљив је и рад Трезора САД, у којем је један од најбитнијих индикатора кретања економске активности динамика индекса малопродаје. Подаци о малопродаји се објављују средином месеца, а компонента малопродаје иде директно у обрачун БДП-а за то тромесечје. Ако су доступни само подаци за месец дана (за прогнозе на почетку референтног тромесечја), често се претпоставља да ће подаци за преостала два месеца тромесечја бити непромењени или ће се наставити забележен тренд (*Kitchen & Monaco, 2003*).

Такође, трговина на мало се показала као статистички значајан индикатор за текућу пројекцију БДП-а зоне евра коришћењем Калмановог филтера у моделима *bridge* (*Angelini et al., 2011*), као и за процену месечног БДП-а Канаде (*Mourougan, 2006*).

Многи радови бавили су се везом између спољне трговине и економске активности у целости, а један од познатијих радова јесте рад који је објавио *Balassa* (1985), у ком је наведено да је сврха укључивања извоза у производну функцију (заједно с капиталом и радном снагом) тестирање хипотезе да извозна оријентација подиже укупну факторску продуктивност путем повољних ефеката на ефикаснију алокацију ресурса, искоришћеност капацитета, економију обима и технолошке промене. Добијени резултати показују да је извоз знатно допринео стопи привредног раста, али и знатно побољшао моћ објашњења једначина.

Банка Француске је за потребе оцене месечног БДП-а користила модел *bridge*, чија спецификација садржи и варијабле извоза и увоза, имајући у виду да је услов за укључивање варијабле у модел барем месечна фреквенција и заостатак у објављивању мањи од два месеца након завршетка референтног периода. Осим званичних података који се тичу увоза и извоза, коришћени су и анкетни подаци Европске комисије. Што се тиче везе између званичних индикатора увоза и извоза и анкетних индикатора очекивања, веза са извозом прилично је директна, јер се ова варијабла односи на активност економских партнера Француске и, као таква, представља замену за екстерну тражњу упућену Француској. Веза са увозом је мање очигледна, али је јасно да ће већи увоз из Француске подстаћи активност трговинских партнера, а економски циклуси европских земаља прилично су усклађени. Приликом оцене модела, аутори су закључили да је спољнотрговинске варијабле изузетно тешко пројектовати због њихове јаке волатилности (*Barhoumi et al.*, 2012).

За потребе текуће и краткорочне прогнозе БДП-а Шпаније коришћен је динамички факторски модел у чијој је спецификацији наведено десет месечних индикатора, од којих се осам односи на реалну активност, а управо се ту налазе и увоз и извоз робе, као и два податка заснована на анкетама (*Arencibia Pareja et al.*, 2020).

2.2. Високофреквентни индикатори

У овом раду већ је било помена о значају благовремених података о кретању економске активности за креаторе политика и економске субјекте, којима је то најважнији инпут за доношење личних и пословних одлука. Циљ великог броја истраживања који се баве питањем процене нивоа БДП-а пре званичне објаве оствареног резултата јесте проналажење индикатора економске активности који добро апроксимирају ову меру, а мање касне између завршетка обрачунског периода и објаве податка. Ови индикатори су посебно значајни у периодима одступања од пројектованог или дугорочног раста, у кризним периодима или наглим експанзијама. Управо за време кризе изазване пандемијом вирусом корона као једно од главних истраживачких питања намеће се питање адекватних индикатора пословног циклуса. Као потенцијални кандидати наводе се већ поменути Гуглови трендови и *Google mobility index*, као и мере коришћења и производње електричне енергије, мере загађености ваздуха и сл. На бази коришћења неких од наведених индикатора оцењују се модели који за сврху имају управо оцену реалног раста БДП-а у датом тренутку. У овом раду се за потребе краткорочне пројекције БДП-а, између осталог, користе и индекси Гуглових трендова и потрошње електричне енергије.

2.2.1. Индикатор Гуглових трендова

Један од индикатора који се последњих година појављује у све већој мери као објашњавајућа варијабла у прогнози и оцени економске активности јесте индекс Гуглових трендова. Гуглови трендови (*trends.google.com*) омогућавају да приступимо динамици претраживања одређеног термина или категорије на одређеној територији у било ком тренутку, а сама база чува податке од 2004. године наопако. Сам начин обрачуна индекса је специфичан, будући да вредности у бази не представљају обим претрага, већ су нормализоване и имају распон од 1 до 100, где 100 представља тачку с највећим интересовањем забележеним у референтном периоду. Једна од највећих предности коришћења Гуглових трендова јесте то што су подаци доступни у сваком тренутку у току обрачунаског периода за дотадашње остварење, односно у реалном времену.

Wolozko (2020) је у свом раду користио преко 200 категорија за потребе израде недељне процене БДП-а за земље *OECD*. Због природе неуронских мрежа, које добро моделују различите нелинеарне везе, није било потребе уносити било какву претпоставку о виду корелације између стопа раста БДП-а и Гуглових трендова. Посебан осврт у овом раду дат је чињеници да је појава високофреквентних индикатора (иако они можда нису креирани с макроекономским моделовањем у виду) управо омогућила коришћење техника дубоког учења које захтевају велику базу података за оптимално функционисање. Модел из наведеног рада успешно је сигнализирао ефекат који ће избијање пандемије имати на економску активност за 45 од 46 земаља *OECD* и свеукупно има нижу грешку предвиђања тромесечног БДП-а од бенчмарк ауторегресионог модела. Резултати из рада о очекиваном односу претрага и кретања БДП-а у складу су са интуицијом (на пример, веће претраге око категорије *инвестиције* могу сигнализирати већи раст БДП-а, док повећање претрага с категоријама *криза* и *рецесија* упућује на нижи раст).

Schmidt & Vosen (2009) су међу првима у свом раду представили нови индикатор за приватну потрошњу као компоненту БДП-а, заснован на Гугловим трендовима. Будући да је приватна потрошња појединачно најзначајнија компонента БДП-а, благовремено и прецизно одређивање њене динамике пружа увид у тренутно стање економске активности. *Wu & Brynjolfsson* (2015) су користили Гуглове трендове као објашњавајућу варијаблу у моделу који предвиђа цене некретнина, те наводе да се економска предвиђања из овог типа података базираног на интернет претрагама могу применити на свако тржиште код ког интернет претрага претходи трансакцији, чак и ако се сама трансакција не дешава у виртуелном простору. *Choi & Varian* (2012) наводе да тврдња која се износи у њиховом раду није у вези с предвиђањем будућности помоћу Гуглових трендова, већ за оцену садашњости, тиме зашавши у поље текућих пројекција. Гуглови трендови су такође коришћени за предвиђање кретања девизног курса (*Markiewicz et al.*, 2018), као и за превазилажење информационах јазова код земаља у развоју (*Narita & Yin*, 2018).

Методологија одабира и обраде података Гуглових трендова посебно је интересантна код *Wolozko* (2020) и укључује коришћење категорија, а не индекса претрага креираних на бази кључних речи, што је случај и у овом раду. Поред тога, у

раду је извршена и њихова трансформација како би се решило неколико проблема у вези с начином прикупљања и приказивања података. Главни проблем са овим подацима јесте то што приказују релативну значајност претрага одређене категорије у односу на укупни број претрага, која је затим помножена константом тако да у сваком тренутку индекс за период када је претрага тог појма била најзначајнија износи 100, односно:

$$SVI_{ct} = \frac{SV_{ct}}{SV_{Tt}} * C_c, \quad (1)$$

где је SVI_{ct} релативни удео претрага по категорији c у периоду t . У овој једначини само именилац, тј. укупан број претрага, зависи искључиво од периода t . Проблем са оваквим начином обрачуна индекса представља чињеница да се с растом укупног броја претрага неминовно смањује релативни удео релевантних категорија, те се на тај начин уводи пристрасност у моделовању. Трансформацијом (1) добијамо:

$$svi_{ct} = \log(SVI_{ct}) = sv_{ct} - sv_{Tt} + c_c. \quad (2)$$

Имајући у виду да је SV_{Tt} непромењен за све категорије у периоду t , можемо га изоловати коришћењем анализе главних компонената над логаритмованим серијама SVI , којима је помоћу *HP* филтера изолован тренд. Добијена прва компонента је затим прерачуната тако да има исту средњу вредност и стандардну девијацију као просек логаритмованих SVI и одузета од логаритмованих SVI . Извршена је трансформација у виду коришћења међугодишњих стопа раста како би се превазишао проблем сезоналности, а индикатори су са извора преузети у виду месечних индекса.

У овом раду су као потенцијални регресори коришћене категорије *пословање и индустрија, финансије, некретнине и путовања*.

2.2.2. Потрошња електричне енергије

Осим Гуглових трендова, од високофреквентних индикатора као потенцијални регресор предложена је варијабла која се односи на потрошњу струје. За потребе прикупљања података о потрошњи струје на територији Србије коришћена је платформа *ENTSO-E Transparency Platform* (енгл. *European Network of Transmission System Operators for Electricity*), која представља заједнички подухват 39 званичних европских оператера преносног система (ОПС), у који је укључена и Електро mreжа Србије. ОПС су субјекти који раде независно од других учесника на тржишту електричне енергије и одговорни су за њен пренос на главним високонапонским електричним мрежама. ОПС омогућавају приступ мрежи учесницима на тржишту електричне енергије и гарантују безбедан рад и одржавање система. Између осталог, чланством у *ENTSO-E*, ОПС се обавезују на достављање одређених података који су потом јавно доступни на страници. У оквиру јавно доступних података налази се и податак о стварном укупном оптерећењу на подручју деловања ОПС у току једног часа, при чему тај податак мора бити достављен најкасније један час по завршетку обрачуноског периода, што га такође чини благовременим. Податке је могуће преузети директно с платформе или коришћењем *API*, као ефикаснију опцију за преузимање и

обраду великих база података попут ове. У овом раду подаци су преузети коришћењем R софтвера и из сатних трансформисани у месечне износе.

Поставља се питање релевантности укључивања овог податка у моделе за пројекције стопе раста БДП-а, односно оправданости коришћења потрошње струје као индикатора економске активности. Невелики број радова објављен је на ову тему, а један од њих бавио се, између осталог, везом између индустријске производње и потрошње струје. *Sun & Anwar (2015)* су, користећи Јохансенову методологију коинтеграције, закључили да постоји статистички значајна дугорочна веза када су у питању потрошња електричне енергије, индустријска производња и предузетништво, на примеру Сингапура.

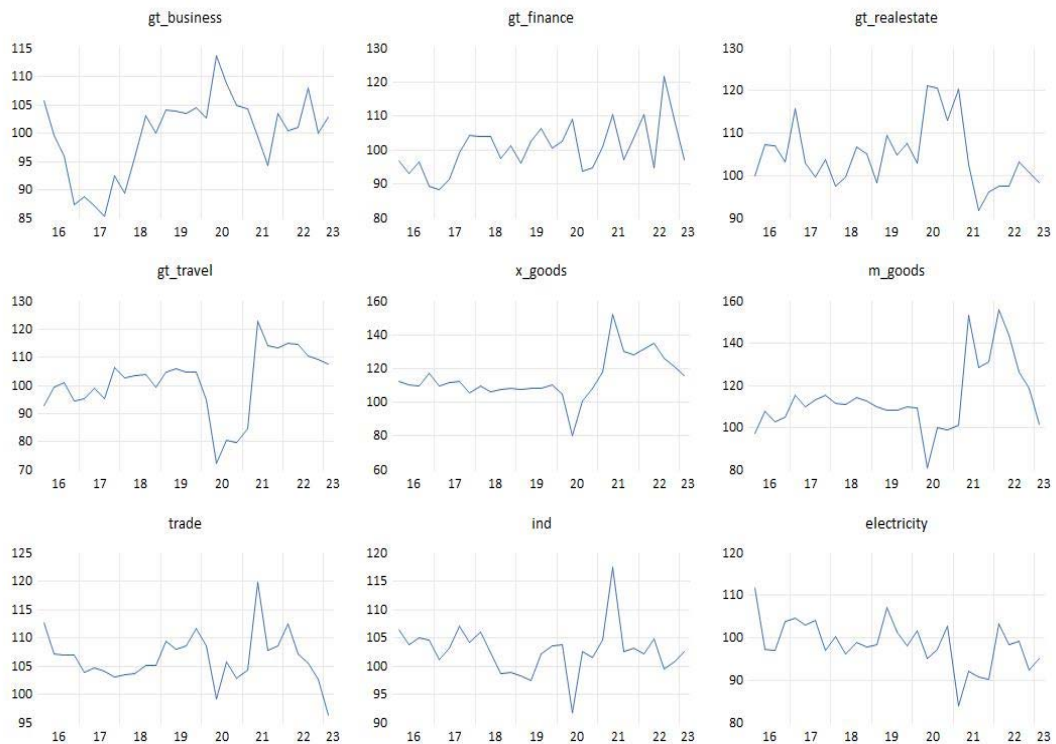
Емпиријски посматрано, у Србији индустрија потроши преко 30% укупне расположиве електричне енергије (извор: Енергетски биланси за 2021. годину). Може се, на пример, претпоставити да се волатилност потрошње енергије може приписати шоковима који погађају индустријску производњу, пошто становништво сачињава велики број малих домаћинстава чија би потрошња електричне енергије требало да буде релативно стабилна. Ипак, имајући у виду да се овај рад бави пројекцијом укупне економске активности, није неопходно дезагрегирати укупну потрошњу електричне енергије, већ само утврдити да ли је она као таква статистички значајна објашњавајућа променљива у текућим и краткорочним пројекцијама БДП-а.

2.3. Трансформација коришћених варијабли и провера стационарности и мултиколинеарности

Подаци коришћени у овом раду трансформисани су у индексе који описују међугодишњу динамику када су у питању и тромесечни и месечни подаци. Као што је наведено, сатни подаци о потрошњи електричне енергије агрегирани су у месечне износе, а затим трансформисани у међугодишње индексе. Графички прикази серија указују на потенцијалну стационарност око константе.

Формална примена ADF теста без додатих доцњи којим се тестира стационарност око ненулта константе, уз ниво значајности од 5%, указује на то да су серије заиста стационарне око константе.

Слика 1. Графички приказ независних варијабли



Поред тога, потребно је проверити да ли у оквиру базе података постоји проблем мултиколинеарности. Свакако је очекивано да ће постојати одређена количина корелисаности између индикатора, ако се узме у обзир да постоји велики број фактора који утичу на динамику свих наведених индикатора, махом из екстерног окружења (цене производа које се одређују на светском тржишту, попут житарица и нафте, степен екстерне тражње, увозна инфлација, итд.), али и домаћег (попут стопе инфлације). На основу анализе мултиколинеарности можемо закључити да постоји висок степен корелације извоза и увоза добара, што је донекле и очекивано, али и између ових варијабли и индекса Гуглових трендова који се тиче путовања. На ове варијабле и њихову интеракцију треба обратити пажњу приликом конструисања модела.

3. Економетријски модел коришћен за текућу прогнозу

Приступ смањења великог броја променљивих или временских серија на само неколико фактора први пут је поменут 1946. године (*Burns & Mitchell, 1946*), а тиче се анализе пословних циклуса. Наиме, чак и тада је дефинисано да, иако постоји велики број индикатора који могу да се крећу проциклично или контрациклично у односу на фазу у којој се економија налази, и даље постоји одређена општа тенденција ка рецесији или експанзији, што није нужно приметно на начин на који је број незапослених или удео ненаплативих кредита. Поред тога, ови показатељи укупне економске активности могу бити истовремени (указујући на тренутно стање економије), водећи (указујући на

правац будућег кретања) и индикатори који касне (потврђују тенденције које су већ у току или су се десиле). Када је реч о тренутној пројекцији било које променљиве, за успех предвиђања неопходно је одредити скуп објашњавајућих променљивих које најбоље описују кретање променљиве коју предвиђамо. Идеалне променљиве за употребу у овим моделима биле би истовремене и водеће, и оне које предвиђају тренутна или будућа кретања с великом прецизношћу. Истовремени показатељи су од посебног значаја ако је период кашњења у објављивању вредности индикатора краћи него у променљивој која се моделује.

Избор потенцијалних регресора из претходног поглавља заснива се на принципу истовремених показатеља који имају краћи период кашњења и водећих показатеља који указују на будуће промене економске активности. Радови који су користили индекс малопродаје означили су га као водећи индикатор, у смислу да указује на промене које се тек развијају у економији. Такође можемо додати Гуглове индексе и потрошњу електричне енергије, поред малопродајног индекса, као водеће индикаторе, док су индустријска производња и извоз и увоз робе истовремени показатељи који имају релативно кратак период кашњења у односу на податке о БДП-у.

3.1. Преглед литературе

Један од најзаступљенијих модела за оцену текућег кретања БДП-а јесте моделовање помоћу регресионих модела података мешовитих фреквенција (енгл. *MIDAS – mixed data sampling*). Моделовање података на овај начин први пут је уведено у раду *Ghysels et al. (2002)*, у ком су представљене предности овог приступа за податке мешовитих фреквенција. Како наводе, типични регресиони модели до тог тренутка подразумевају коришћење временских серија које су прикупљане у редовним и једнаким временским интервалима. Међутим, често је случај да су информације од значаја садржане у индикаторима с високом фреквенцијом, док су серије које треба моделовати ниже фреквенције, а као типичан пример наводе се макроекономски подаци и потенцијал моделовања тромесечних података о БДП-у на основу месечних индикатора.

Armesto et al. (2010) су у свом раду поставили питање најефикаснијег приступа моделовању мешовитих података. Закључили су да се у моделима који се ослањају на велики број објашњавајућих варијабли, због проблема великог броја потенцијалних параметара, могу боље показати „штедљивији” модели, односно модели агрегације и регресиони модели података мешовитих фреквенција, а да је предност регресионих модела података мешовитих фреквенција чињеница да он дозвољава и пројекције унутар самог периода.

Ghysels et al. су такође поставили питање оправданости укључивања финансијских података (који имају значајно већу фреквенцију од макроекономских варијабли) у макроекономске пројекције. Премиса је да велики број дневних финансијских временских серија садржи информације значајне за даље кретање економске активности које су изгубљене агрегацијом. Модели коришћени у раду показују да је хипотеза тачна,

односно да се коришћењем варијација регресионих модела података мешовитих фреквенција уз регресоре из финансијског сектора добија поузданија пројекција.

Frale & Monteforte (2010) су у свом раду комбиновали два приступа и предложили факторски модел с мешовитом фреквенцијом, где се високофреквентни индикатори третирају приступом регресионих модела података мешовитих фреквенција (*FaMIDAS*). Закључили су да овакви модели дају добре процене месечног БДП-а и краткорочне тромесечне пројекције.

3.2. Теоријски оквир регресивних модела мешовитих фреквенцијских података

Теоријски оквир је преузет из радова *Ghysels et al.* (2004), *Ghysels et al.* (2016) и *Sinko* (2008).

Регресиони модели података мешовитих фреквенција не могу бити ауторегресиони модели због природе *AP* модела која захтева једнакост у фреквенцијама, али су најсличнији моделима дистрибуираног кашњења.

Прост регресиони модел података мешовитих фреквенција има следећу структуру:

$$Y_t = \beta_0 + B(L^{1/m}, \theta)X_t^{(m)} + \varepsilon_t^{(m)}, \quad (3)$$

при чему m означава колико је учесталост објашњавајуће варијабле већа од зависне варијабле, те би у случају моделовања годишњих података уз тромесечне објашњавајуће променљиве m износило 4. Даље,

$$B(L^{1/m}, \theta) = \sum_{k=0}^K B(k, \theta)L^{k/m} \quad (4)$$

$$L^{1/m}X_t^{(m)} = X_{t-1/m}^{(m)} \quad (5)$$

математички би постојала једнакост између $L^{k/m}$ коефицијента помноженог са $X_t^{(m)}$ и вредности $X_t^{(m)}$ са k/m доцњи. У примеру с годишњим и тромесечним фреквенцијама то значи да је овогодишња вредност Y_t пројектована на базу података с тромесечним подацима о вредности $X_t^{(m)}$ све до K -тог тромесечја уназад. Теоријски, број параметара за оцењивања из полинома $B(L^{1/m})$ је коначан за потребе поједностављивања, али ако се узме у обзир да је потребно оценити по један b_k за сваки од периода, у случају високофреквентних података (дневних или сатних) то је изузетно велики скуп параметара за оцењивање. Емпиријски, овај проблем се иницијално третирао агрегацијом високофреквентних података, како би њихова учесталост била истог реда као код нискофреквентне, зависне варијабле, у недостатку модела који дозвољавају постојање различитих фреквенција. Приступ агрегације значио би занемаривање неких потенцијално значајних информација трансформацијом серија. Како би се тај проблем превазишао, у регресионим моделима података мешовитих фреквенција уводи се вектор θ у функцији од којег се оцењују параметри модела. Постоји неколико потенцијалних спецификација $B(L^{1/m}, \theta)$ које се могу користити за оцењивање параметара модела. Поред тога, коришћење параметарске функције $B(L^{1/m}, \theta)$ омогућава и ефикаснији избор доцњи које треба укључити у модел. Избором адекватне форме вектора θ заправо

се омогућава да избор броја доцњи буде наметнут структуром самих података (Sinko, 2008).

У матричној репрезентацији, пример регресионог модела података различитих фреквенција у ком је зависна променљива y_t тромесечна и чију динамику моделујемо коришћењем доцњи саме зависне променљиве и месечне променљиве x_τ и њених доцњи, има следећу форму:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} x_6 & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{3n} & \dots & x_{3n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

Дакле, у сваком тромесечју t , ако се има у виду да је $m = 3$, зависна променљива y_t линеарна је комбинација варијабли x_{3t} , x_{3t-1} , x_{3t-2} из текућег тромесечја m , и y_{t-1} и $x_{3(t-1)}$, $x_{3(t-1)-1}$, $x_{3(t-1)-2}$ из претходног тромесечја $t - 1$.

На овај начин се врши својеврсно усклађивање фреквенција, будући да је високофреквентна варијабла x_τ трансформисана у вектор ниже фреквенције $(x_{3t}, \dots, x_{3t-5})^T$. Треба приметити да је за ову врсту трансформације неопходно да број опсервација у варијабли x_τ буде тачно $3n$. У случајевима који су чести у пракси, а који се тичу тзв. недостајућих рубова, односно кашњења и различитих времена објављивања званичних података, потребно је или користити избалансиране званичне податке или оценити недостајуће вредности помоћу модела или применом Калмановог филтера.

С друге стране, ако бисмо у модел из (6) желели да додамо још једну објашњавајућу, високофреквентну променљиву z , која се објављује на недељном нивоу, потребно је проширити модел. Коришћење недељних података (као и дневних података и података о радним данима) указује на још једно ограничење регресионих модела различитих фреквенција, а које се односи на то што ови модели не трпе варијације у броју опсервација у оквиру једног обрачунског периода m који се односи на зависну променљиву. То значи да сваки месец мора строго имати четири недеље, односно у овој илустрацији свако тромесечје мора имати 12 недеља. У случају варијабле z_τ вредност m за потребе усклађивања фреквенција износи 12. Поред горепомнутих варијабли и доцњи, моделу додајемо опсервације z_{12t} , z_{12t-1} , \dots , z_{12t-11} из текућег тромесечја m и $z_{12(t-1)}$, $z_{12(t-1)-1}$, \dots , $z_{12(t-1)-11}$ из претходног тромесечја $t - 1$. Односно, у матричној форми:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} x_6 & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{3n} & \dots & x_{3n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{24} & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{12n} & \dots & z_{12n-23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Фреквенције неке високофреквентне варијабле x_τ у општем случају усклађујемо трансформацијом у нискофреквентни вектор $(x_{tm_i}^{(i)}, x_{tm_i-1}^{(i)}, \dots, x_{tm_i-l}^{(i)})^T$, при чему добијемо матричну репрезентацију општег модела у следећој форми:

$$\begin{bmatrix} y_l \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{l-1} & \cdots & y_{l-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & \cdots & y_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^k X^{(i)} \begin{bmatrix} \beta_0^{(i)} \\ \vdots \\ \beta_l^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$X^{(i)} := \begin{bmatrix} x_{um_i}^{(i)} & x_{um_i-1}^{(i)} & \cdots & x_{um_i-l}^{(i)} \\ x_{(u+1)m_i}^{(i)} & x_{(u+1)m_i-1}^{(i)} & \cdots & x_{(u+1)m_i-l}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{tm_i}^{(i)} & x_{tm_i-1}^{(i)} & \cdots & x_{tm_i-l}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(n-1)m_i}^{(i)} & x_{(n-1)m_i-1}^{(i)} & \cdots & x_{(n-1)m_i-l}^{(i)} \\ x_{nm_i}^{(i)} & x_{nm_i-1}^{(i)} & \cdots & x_{nm_i-l}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где је n број опсервација зависне варијабле, m је фреквенција, p је број доцњи зависне варијабле који је укључен у модел, а u је најмањи цео број за који важи $um_i - l > 0$ и $u > p$.

Приликом дефинисања регресионог модела података мешовитих фреквенција уведен је појам параметарских функција. Избор адекватне функције параметарског ограничења доводи до пожељнијих исхода када су у питању перформансе модела. Функција параметарског ограничења и усклађивање фреквенције јесу међузависни концепти, помоћу којих се дефинише веза између високофреквентних и нискофреквентних променљивих на одговарајући начин. Циљ је да се што боље апроксимира однос између ових варијабли упркос њиховим различитим фреквенцијама.

Функција параметарског ограничења игра кључну улогу у постизању усклађивања фреквенција. Она одређује функционални облик односа између високофреквентних и нискофреквентних варијабли. Наметањем одговарајућих ограничења функција осигурава да су високофреквентне информације на одговарајући начин мапиране у домен ниске фреквенције.

Функција параметарског ограничења пружа оквир за дефинисање како варијабла ниске фреквенције зависи од вредности или доцњи високофреквентне променљиве. Функција успоставља везу између два различита домена фреквенција и омогућава смислено тумачење и анализу односа између варијабли посматраних на различитим фреквенцијама.

Постоји више потенцијалних функција параметарског ограничења које могу бити коришћене приликом моделовања, а експоненцијални полином Ширли Алмон, бета функција (аналогна функцији вероватноће), Гомперцова функција, логаритамска Кошијева функција само су неке од њих. За потребе прогнозе БДП-а која је наведена у наставку овог рада коришћена је експоненцијална функција доцње Ширли Алмон (*Almon, 1965*).

Ова параметарска функција почива на Вајерштрасовој теореме. Према Вајерштрасовој теореме о екстремној вредности (познатој и као теорема о екстремној вредности), коришћеној у математичкој анализи, ако је функција $f(x)$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$, тада $f(x)$ има максималну и минималну вредност на том интервалу најмање једном. Даље, та функција може се апроксимирати полиномом $p(x)$ неког реда P . Узмимо за пример следећи модел:

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \beta_n x_{t-n} + u_t, \quad (10)$$

$$t = 1, 2, \dots, T.$$

Применом Вајерштрасове теореме Ширли Алмон је дошла до закључка да се параметри $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ могу апроксимирати следећим полиномом реда P :

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_p i^P. \quad (11)$$

Односно, заменом (11) у (10),

$$y_t = a_0 x_t + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p) x_{t-1} + (a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^P a_p) x_{t-2} + \dots$$

$$+ (a_0 + n a_1 + n^2 a_2 + \dots + n^P a_p) x_{t-n} + u_t \quad (12)$$

при чему важи:

$$y_t = a_0 z_{0t} + a_1 z_{1t} + a_2 z_{2t} + \dots + a_p z_{pt} + u_t$$

$$z_{0t} = (x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-n})$$

$$\vdots$$

$$z_{pt} = (x_{t-1} + 2^P x_{t-2} + \dots + n^P x_{t-n}) \quad (13)$$

Коришћење полинома Ширли Алмон приликом оцене регресионог модела података различитих фреквенција своди иницијални модел с великим бројем високофреквентних параметара и њихових доцњи на модел с мањим бројем параметара за оцењивање.

3.3. Оцена регресионог модела података мешовитих фреквенција

Када је у питању оцена регресионог модела података мешовитих фреквенција, користе се стандардни статистички тестови за утврђивање валидности и адекватности модела. Већ је утврђено да су и зависна променљива (међугодишњи индекс раста БДП-а), као и сви потенцијални регресори (извоз и увоз робе, трговина на мало и индустријска производња, као и индекси Гуглових трендова и потрошње електричне енергије), стационарни и не постоји значајан проблем мултиколинеарности. Ипак, због релативно малог узорка (29 тромесечних података и по 85 месечних за сваки од потенцијалних регресора) неопходно је изабрати адекватне променљиве за модел. Такође, модел је оцењен на основу периода Т1 2016 – Т4 2021, док је последњих шест тромесечја коришћено за проверу валидности прогнозе. Иницијално, укључене варијабле су били званични индикатори статистичког завода, као и индекс потрошње електричне енергије. Итеративним поступком, праћењем Акаикеовог критеријума, показало се да је најбољи комплемент званичним подацима Гуглов индекс који се

односи на пословне теме (*gt_business*), као и индекс који се тиче интересовања за тему финансија (*gt_finance*), као и већ присутан индекс потрошње електричне енергије.

Специфичност регресионог модела мешовитих фреквенција (као и свих модела који се баве текућом прогнозом БДП-а) јесте то што је примарни показатељ успешности модела корен средње квадратне грешке прогнозе (енгл. *RMFE – root mean forecast error*), чак и по цену укључивања регресора који према *p*-вредности нису статистички значајни. Такође, праћењем СКГП и Акаикеовог критеријума било је потребно одлучити да ли је значајнији допринос већег броја варијабли наспрам већег броја доцњи. Као што је представљено у теоријском осврту, број доцњи укључених у модел није једнак броју параметара модела, будући да се утицај појединачних варијабли и њихових доцњи оцењује помоћу параметарске функције, у овом случају функције полинома Ширли Алмон. Имајући у виду да су коришћени месечни подаци, а моделује се тромесечни податак о БДП-у, одабран је полином трећег реда. Поред тога, сама процедура има опцију аутоматског одабира значајних доцњи, будући да моделска спецификација не прати неки већ објављени модел, па није ограничена претходно одабраним бројем доцњи, већ се у модел укључују само доцње које се покажу као статистички значајне на датом узорку. Иницијални модел укључивао је све дате потенцијалне регресоре, а принципом праћења СКГП заједно са статистичком значајношћу датог регресора, итеративно су искључивани регресори, све док није одабрана крајња моделска спецификација. С тим у вези, модел који показује најбоље перформансе на бази предложених индикатора јесте следећи модел:

Слика 2. Оцењени регресиони модел података мешовитих фреквенција

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDP(-1)	0.701371	0.080774	8.683141	0.0000
Page: GT_BUSINESS Series: GT_BUSINESS Lags: 4				
PDL01	0.127017	0.224591	0.565549	0.5821
PDL02	0.075517	0.203254	0.371540	0.7167
PDL03	-0.041929	0.040506	-1.035135	0.3210
Page: IND Series: IND Lags: 5				
PDL01	-0.700033	0.173006	-4.046296	0.0016
PDL02	0.845103	0.144796	5.836520	0.0001
PDL03	-0.161418	0.025421	-6.349781	0.0000
Page: ELECTRICITY Series: ELECTRICITY Lags: 4				
PDL01	-0.242987	0.166338	-1.460801	0.1698
PDL02	0.301689	0.162097	1.861158	0.0874
PDL03	-0.068253	0.033511	-2.036719	0.0644
R-squared	0.939454	Mean dependent var	103.5311	
Adjusted R-squared	0.894044	S.D. dependent var	3.829498	
S.E. of regression	1.246536	Akaike info criterion	3.581570	
Sum squared resid	18.64624	Schwarz criterion	4.077498	
Log likelihood	-29.39727	Hannan-Quinn criter.	3.698396	
Durbin-Watson stat	2.074969			

Финални модел укључује једну доцњу зависне варијабле ($GDP(-1)$), Гуглов тренд индекс за категорију *Business* ($GT_BUSINESS$) с четири одабране доцње, индекс индустријске производње с пет одабраних доцњи (IND), као и индекс потрошње електричне енергије ($ELECTRICITY$) с четири одабране доцње. Све објашњавајуће варијабле су месечне фреквенције, док је зависна варијабла квартална. Дакле, укупно 13 параметара оцењено је помоћу девет коефицијената Ширли Алмон.

Одабрани модел има следеће перформансе када је у питању грешка унутар узорка који је оцењиван и ван њега:

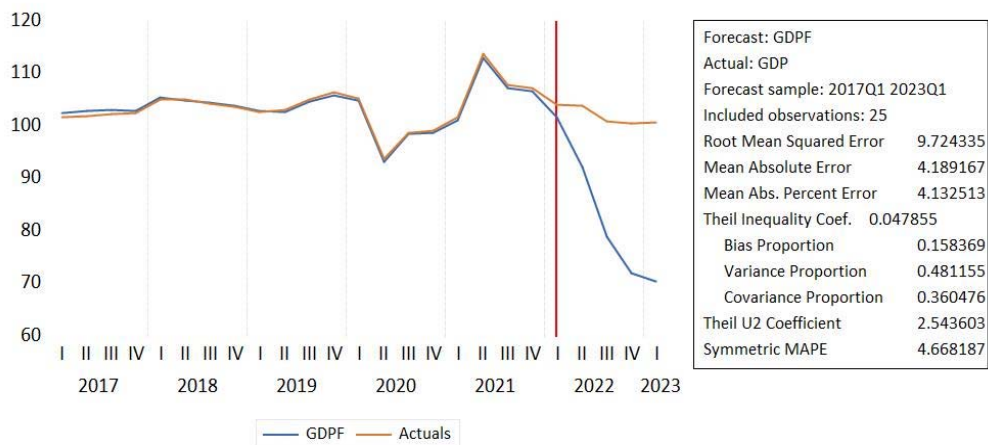
Слика 3. Пројекције оцењеног модела *MIDAS* и ванузорачке пројекције модела



Иако појединачно индикатор Гуглових трендова коришћен у моделу није статистички значајан, његово искључивање се показало као неповољно по перформансе ванузорачке прогнозе. Потенцијални разлози одсуства статистичке значајности огледају се у томе што је у питању релативно мали узорак за модел ове величине, затим и начина на који се прикупљају подаци о Гугловим трендовима (иако је то делимично

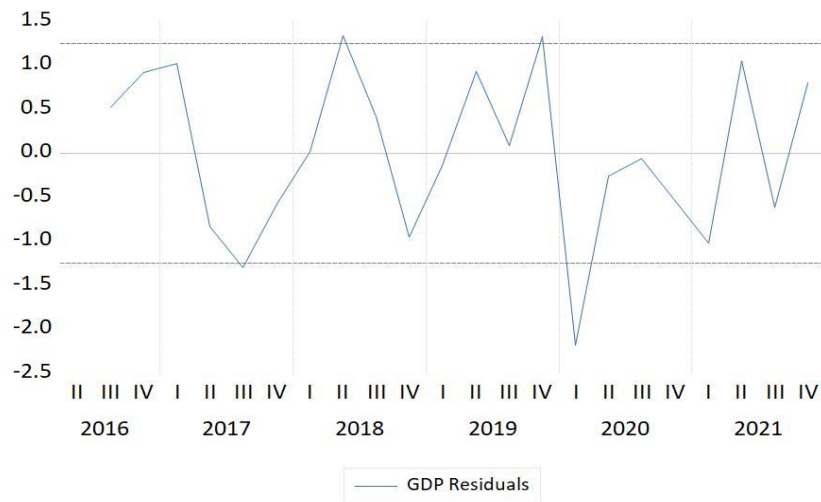
неутрализовано узимањем стопа раста), али и чињеницом да стопа корелација између кретања овог индекса и индекса индустријске прогнозе, иако недовољно висока да сама по себи буде проблематична, ипак није занемарљива (-0,4). Даље, регресиони модели података мешовитих фреквенција оцењени на овако малом узорку генерално имају проблем прекомерног прилагођавања подацима (енгл. *overfitting*), односно тенденцију да „запамте” податке уместо да апстрахују најзначајније релације, што се огледа у значајно мањој грешци унутар узорка, уз лошију пројекцију и већу грешку пројекције ван узорка. Искључивање индекса претраживања пословних тема доводи до знатно лошије ванузорачке прогнозе и присутнијег проблема прекомерног прилагођавања подацима, а с обзиром на то да је главни циљ модела што прецизнија текућа прогноза, оправдано је укључити варијаблу која доприноси смањењу СКГП, иако сама по себи није нужно значајна за објашњавање динамике зависне варијабле. Осим тога, ако упоредимо одабрани модел који садржи две варијабле које нису званични месечни индикатори економске активности с моделом који садржи само индикаторе које објављује статистички завод, видимо да је укључивање Гуглових трендова и потрошње струје у модел довело до боље ситуације када је у питању овај проблем, али и смањило грешку прогнозе. У наставку можемо видети перформансе регресионог модела података мешовитих фреквенција који као регресоре садржи извоз и увоз робе, трговину на мало и индустријску производњу као регресоре, у коме је евидентан проблем прекомерног прилагођавања подацима.

Слика 4. Пројекције алтернативног регресионог модела података мешовитих фреквенција

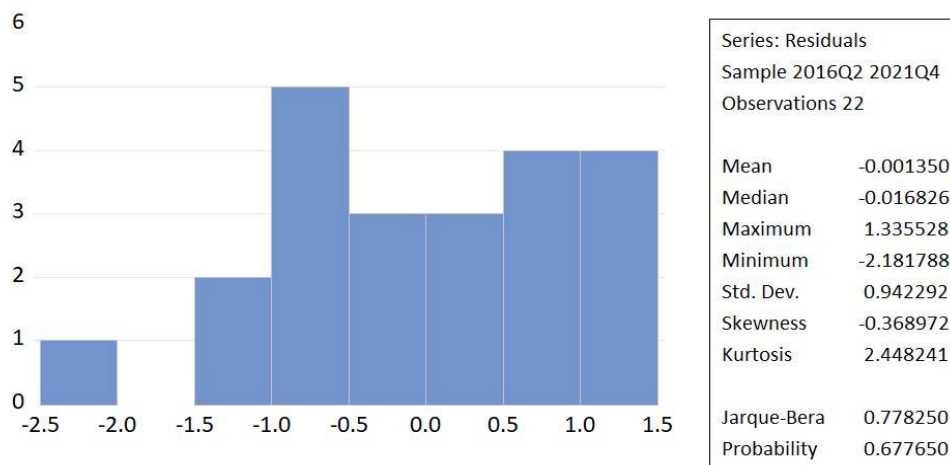


Даља провера адекватности модела огледа се у провери моделских резидуала за одабрани модел, чија је спецификација претходно приказана на Слици 2 у овом делу.

Слика 5. Резидуали оцењеног регресионог модела података мешовитих фреквенција



На основу графикана може се претпоставити да су резидуали нормално расподељени, што се даље може проверити коришћењем *Jarque-Bera* теста нормалности. Резултати тестирања за одабрани регресиони модел података мешовитих фреквенција дати су у наставку.

Слика 6. *Jarque-Bera* тест нормалности резидуала за оцењени регресиони модел података мешовитих фреквенција

P -вредност за *Jarque-Bera* тест нормалности указује на неодбацивање нулте хипотезе о нормалности резидуала.

4. Модели машинског учења у економетрији

Специфичност поља машинског учења делом се огледа у томе што не постоји конкретан преглед историјата и развоја дисциплине (*Plasek, 2016*). Аутор износи врло интересантну тврдњу која се тиче природе дисциплине, а то је чињеница да системи машинског учења обично имају статус експеримента, јер се користе и као потврда и као противтежа ономе што знамо. Ипак, зачетак дисциплине обично се везује за психолога Франка Розенблата са Универзитета Корнел, који је на основу идеја о начину функционисања нервног система, створио машину за препознавање слова. Машина, названа перцептрон сматра се прототипом савремених неуронских мрежа (*Fradkov, 2020*).

Према *Murphy (2012)*, циљ машинског учења је аутоматизација процеса проналажења образаца у подацима, на начин да ти обрасци релативно добро предвиђају будућа кретања варијабли од интереса. Потреба за оваквом врстом моделовања јавила се с растућом количином доступних података, односно иде руку под руку с концептом *big data*, који се сматра првом прекретницом у машинском учењу. Друга прекретница везује се за трошкове обраде огромне количине података у све комплекснијим системима, без адекватних процесора. Решење су пронашле компаније Гугл и Хадуп. Трећа прекретница је експлозивни раст дубоког учења.

Без обзира на мањак систематизације у овом пољу због његовог експлозивног раста *Alzubi et al. (2018)* издваја неколико кључних догађаја који су дефинисали развој дисциплине, од којих су неки формулисање Туринговог теста, представљање концепта вештачке интелигенције, затим алгоритма за представљање шаблона, победа ИБМ-овог компјутера над Гаријем Каспаровим у шаху и креирање неуралних мрежа које препознају патерне и лица.

Уз растућу комплексност модела у економетрији, што је природна последица усложњавања међуделовања различитих економских субјеката због појаве интернета, безготовинске и онлајн трговине и сличних обележја времена у ком живимо, као и све веће доступности база података, дошло је и до потребе да се постојећи модели унапреде и учине ефикаснијим. Један од начина јесте увођење машинског учења у економетрију, које можемо дефинисати као могућност система да учи из података на начин који ће обезбедити аутоматизацију процеса изградње модела и ефикасније решавати настале проблеме (*Janiesch et al., 2021*).

Машинско учење подразумева примену алгоритама који итеративно уче из података специфичних за проблем, тиме омогућивши увид у релације и обрасце за које нису експлицитно програмирани. Можемо разликовати више видова машинског учења: надгледано учење (енгл. *supervised learning*), ненадгледано учење (енгл. *unsupervised learning*) и појачано учење (енгл. *reinforcement learning*) (*Sarker, 2021*). Надгледано учење подразумева обезбеђивање инпута и оутпута тако да омогући да алгоритам увиди постојеће везе и креира адекватан модел који описује те везе. Ненадгледано учење захтева да алгоритам сам пронађе структуру у базама података које ни на који начин нису обележене. Појачано учење укључује динамично окружење, где алгоритам добија повратну реакцију из система након обављене радње, а циљ је максимизација позитивне

повратне реакције. У оквиру машинског учења налази се и дубоко учење (енгл. *deep learning*), које је фокус овог рада.

Генерално посматрајући, за израду модела машинског учења неопходне су нам три ствари:

- инпути, тј. подаци које је потребно анализирати (на пример, ако анализирамо сентимент, потребни су нам текстуални подаци на основу којих оцењујемо присутан сентимент);
- примери очекиваних оутпута, тј. резултати које очекујемо да добијемо из података (текстуални подаци на основу којих анализирамо сентимент морају имати придружене оцене сентимента);
- начин на који меримо успешност алгорита, односно разлику између оцењене и стварне вредности на основу које ће се начин функционисања алгорита прилагођавати (ово је заправо део који се односи на „учење” у машинском учењу).

Заправо, сви ови елементи су присутни и у класичном моделовању, али то не значи нужно да је на сваки економетријски проблем могуће применити неку од метода машинског учења. Уз примену адекватног модела, свакако се добијају задовољавајући резултати када је у питању моделовање података присутних у узорку, будући да ће модел „научити” како да препозна присутне обрасце. Међутим, упитно је да ли ће модел бити ефикасан у предвиђању вредности које се налазе ван узорка на којем је трениран. Наиме, модели машинског учења (а посебно дубоког учења) веома су склони проблему прекомерног прилагођавања подацима (*Chollet et al., 2022*), о чему је већ било речи приликом оцењивања регресионог модела података мешовитих фреквенција.

Једна од ставки која помаже у изради доброг модела машинског учења јесте довољно велика база података. *Zhang & Ling (2018)* у свом раду машинско учење називају приступом вођеним подацима и наглашавају да је кључни састојак иза успеха ових модела препознавање образаца на основу довољно великог броја инпута за учење. Неуронске мреже превазилазе класичне методе машинског учења тек када базе података пређу одређену количину података, као и да перформансе модела тада почињу да се побољшавају по већој стопи у поређењу с класичним алгоритмима.

До пре неколико година једини подаци који су били релевантни за економетријске анализе могли су се добити из званичних статистичких завода и релевантних институција. Данас постоји мноштво високофреквентних, релевантних и доступних података који се могу искористити за објашњавање кретања и предвиђања економских варијабли, а уз машинско учење могуће је оценити модел који ће на најефикаснији начин обрадити ту количину улазних података.

Varian (2014) наводи да сврха економетријске анализе спада у једну од четири категорије: предвиђање, сумирање, процена и тестирање хипотеза. Машинско учење се првенствено бави предвиђањем, те ће и у овом раду квалитет модела машинског учења бити оцењен кроз успешност да предвиди будуће кретање варијабле од интереса.

Модели машинског учења су се од самог почетка показали као изузетно корисни у задацима класификације. Неки од најпознатијих алгоритама машинског учења су:

- Наивни Бајес, класификациони алгоритам који се односи на Бајесову теорему, чија је претпоставка међусобна независност карактеристика улазних података (одакле и потиче „наивност”).
- Модели језгра (енгл. *Kernel methods*), у оквиру којих се налази метода потпорних вектора (енгл. *support vector machines*), која је свој данашњи облик добила у раду из 1995. године (*Cortes & Vapnik, 1995*), где је дефинисана као нова методологија за класификационе проблеме с две класе. Идеја је да се улазни вектори нелинеарно мапирају у вишедимензиони простор карактеристика, одакле се као излаз добија поново линеарна одлука о класификацији улаза. Посебан значај дат је високом степену генерализације овим приступом, а његова суштина је у проналажењу оптималних граница одлучивања о припадању одређеној класи. У вишедимензионом простору, питање одређивања оптималне границе одлучивања није везано за одређивање координата, већ удаљености између тачака које представљају инпуте помоћу методе језгра. Често се ови модели сматрају плитким репрезентацијама неуронских мрежа.
- Стабла одлучивања и методе настале из ње попут *random forest* и *gradient boosting*. Алгоритам *random forest* укључује много дрвећа одлучивања на основу којих се добија крајњи излаз. На сличан начин функционишу и алгоритми *gradient boosting*, при чему они користе амплификацију градијената тако да побољшају перформансе у тачкама где су се претходне итерације модела најслабије показале.

Овај рад ће се конкретно бавити подсегментом машинског учења који се односи на дубоко учење, тачније неуронске мреже, који је све више присутан у моделовању временских серија у протеклој деценији. Дубоко учење је приступ учењу образаца из података који ставља нагласак на учење узастопних слојева уз растућу ефикасност. Дубина у дубоком учењу не односи се на било какво боље или дубље разумевање које се добија оваквим приступом, већ означава управо замисао постојања узастопних слојева модела. Дубина модела је дефинисана бројем слојева који доприносе крајњем резултату. Други прикладни називи за ову област могли би бити *слојевито учење* и *хијерархијско учење* (*Chollet & Allaire, 2018*). Теоретски, не постоји горња граница за број слојева кроз које се може дешавати учење, а главна разлика у односу на друге методе машинског учења јесте што у класичном машинском учењу постоји један или евентуално два слоја обрађених података, те се такве методе понекад називају плитким учењем.

4.1. Неуронске мреже

Иницијално, успон неуронских мрежа десио се уз унапређење овог метода у сврхе боље класификације слика. Нагли скок у коришћењу десио се када су се мреже показале као изузетно корисне за низ проблема, пре свега јер су у процесу креирања адекватног модела аутоматизовале један од кључних корака – тзв. *feature engineering*. *Feature engineering* је до неуронских мрежа подразумевао обраду податка на начин који ће дати излазе најбољих перформанси у зависности од коришћеног модела. Неуронске мреже

саме обрађују улазне податке у првом слоју, а затим долази до даље трансформације у свим наредним слојевима све до последњег, излазног слоја.

Објашњење начина функционисања неуронских мрежа преузето је из *Chollet et al.* (2022). Основу неуронске мреже чини градивна јединица названа перцептрон, док неколико перцептрона поређаних у слојевима чини неуронску мрежу. Перцептрон сачињавају четири целине:

- улазни подаци (енгл. *input layer*),
- пондери (вредности којима се пондеришу улазни подаци),
- пондерисана сума,
- активациона функција (која се може, а и не мора активирати по пријему пондерисане суме).

На крају овог процеса добија се излазни податак (енгл. *output layer*), чије су димензије дефинисане типом проблема који се решава – ако је у питању регресија или бинарна класификација, излазни податак ће бити само један. У случају вишеструке класификације, где се моделује вероватноћа припадања одређеној класи, излазни слој ће имати онолико чворова (енгл. *nodes*) колико постоји класа. Од типа проблема који се моделује зависи тип активационе функције која се користи. Неке од могућих активационих функција набројане су у наставку:

- Функција активације исправљача (*Rectified Linear Unit – ReLu*) – враћа нуле за све негативне вредности, док за позитивне вредности враћа максимум из скупа;
- *Leaky rectified linear unit (Leaky ReLu)* – прихвата негативне вредности, али уз мале пондере који зависе од a коефицијента;
- *Tanh* активациона функција која је нелинеарна, али има мали опсег деловања, те чешће одбацује значајне инпуте и има активационе вредности у распону $[-1, 1]$;
- Сигмоидна функција је слична претходној, с тим да су активационе вредности у распону $[0, 1]$, те је посебно погодна за моделовање проблема вероватноће;
- *Softmax* – активационе вредности сабирају се до 1, те је погодна за вишеструку класификацију.

Минимални број слојева (енгл. *layers*) које неуронска мрежа може да има је два, узимајући у обзир да се улазни слој не рачуна, па би најпростију, плитку неуронску мрежу чинио излазни слој и један сакривени слој (енгл. *hidden layer*).

Мрежа податке из улазног слоја узима у мини-серијама (енгл. *batch*), при чему је број чворова једнак броју објашњавајућих варијабли и оне морају бити у нумеричкој форми. У сакривеном делу се може наћи неколико различитих врста слојева. Код густих слојева (енгл. *dense layers*), сваки чвор у улазном слоју повезан је са сваким чвором у излазном слоју (потпуно повезани слојеви). Конволуциони слојеви су сачињени од филтера који обрађују део улазних чворова, али увек тако да на крају сваки улазни чвор бива повезан с макар једним чвором у сакривеном делу мреже. У овом раду биће примењен модел рекурентне неуралне мреже (чворови могу узети своје пређашње излазне вредности као улазне вредности), тачније мреже *LSTM* (енгл. *long short-term*

memory), које су најподесније за рад с временским серијама, што ће бити илустровано у наставку овог поглавља.

Свака мрежа мора имати дефинисану функцију губитка (*loss*), која служи за оцену квалитета предвиђања модела (успешности модела). У зависности од броја излазних варијабли, можемо имати неколико функција губитка у моделу (по једну за сваку). За неуронске мреже које се користе за регресионе проблеме користе се већ познате средња квадратна грешка (СКГ), средња апсолутна грешка (САГ), док се за проблеме бинарне класификационе природе користи бинарна унакрсна ентропија и *hinge loss* (сличан протокол као код модела потпорних вектора).

Уз функцију губитка, оптимизациони протокол заокружује једну неуронску мрежу. Помоћу оптимизатора се у свакој итерацији ажурирају пондери, тако да вредност функције губитка при генерисању новог излазног слоја опада. Најчешће коришћен оптимизатор је градијентални спуст (енгл. *gradient descent*). Заправо, то је једноставни принцип тражења глобалног минимума функције губитка итеративним мењањем пондера на основу досадашњих реализованих излазних слојева. Као и код свих проблема овог типа, постоји проблем заустављања на локалном минимуму, што се решава конвексном природом функције губитка и стопом учења (енгл. *learning rate*). Висока стопа учења брзо ће се кретати низ функцију губитка која је конвексна, те може „омашити” глобални минимум. Превише ниска стопа учења захтева велики број итерација да би се пронашао минимум, те је временски захтевна. Проналажење оптималне стопе учења као резултат је дало унапређење оптимизатора градијентног спуста и креирање оптимизатора Адам (енгл. *adaptive momentum estimation*), који у обрачуна новог градијента узима у обзир његове претходне вредности.

У *Goulet Coulombe et al. (2022)* аутори пореде различите врсте модела машинског учења на подацима базе ФРЕД који се тичу индустријске производње, стопе незапослености, инфлације, разлике између десетогодишње стопе доспећа трезорских обвезница и референте стопе, као и цене некретнина. Дошли су до неколико закључака, од којих су два посебно релевантна за овај рад, а то је чињеница да је нелинеарност модела машинског учења посебно корисна у ситуацијама макроекономске неизвесности, затегнутих финансијских услова и током пуцања балона на тржишту некретнина. Други закључак тиче се количине података у моделу, при чему први закључак важи у случају модела који су богати подацима, док мањи модели имају боље перформансе ако се нелинеарни модели машинског учења комбинују с класичном факторском анализом.

Horr (2022) наводи да су од свих модела машинског учења највећи раст забележили управо модели неуронских мрежа. Ипак, од свих области у којима се примењују модели неуронских мрежа, вероватно је најспорији напредак забележен у економетријским текућим пројекцијама, што је највероватније последица истих проблема с којим се суочавају традиционални економетријски модели као што су мултиколинеарност, недостајући подаци, мешовите фреквенције и кашњење објављивања података. Поред тога, огромна количина података и додавање објашњавајућих варијабли у моделе који већ имају неки од ових проблема може додатно погоршати ситуацију. Норр је дошао до закључка да модел *LSTM* има боље перформансе од модела *DFM* због тога што се не

ослања на инвертибилност матрице, тако да може да обради било који скуп података и било коју комбинацију фреквенција. Једна од најзначајнијих предности коришћења модела *LSTM* јесте управо то што се не ослања на инвертибилност матрице, те може као инпут имати и сингуларне матрице или матрице које нису квадратне, што је често случај када се ради о реалним подацима. Такође, пошто поменути модели користе велике базе података, инвертибилност матрице често је технички и временски захтеван услов, који није нужно могуће испунити. С друге стране, недостаци у односу на модел *DFM* укључују стохастичку природу модела *LSTM*, недостатак интерпретабилности у коефицијентима и чињеницу да је у питању „црна кутија” када су у питању доприноси појединачних објашњавајућих варијабли.

Управо се на овај недостатак позивају *Medeiros et al.* (2005), сместивши неуронске мреже у групу модела која оставља функционални облик неспецификованим. Иако ови модели садрже параметре (и то велики број), они нису глобално идентификовани односно оцењени, те самим тим не могу бити интерпретирани.

Elsayed et al. (2021) постављају питање да ли су нам за пројектовање временских серија уопште потребни модели дубоког учења и закључују да су некад простији модели класичног машинског учења сасвим довољни за моделовање динамика униваријантних и мултиваријантних временских серија.

4.1.1. Неуронске мреже *LSTM*

Кратак преглед функционисања модела *LSTM* може се пронаћи код *Siami-Namini et al.* (2019). Када неуронска мрежа има задатак да моделује међузависне податке, односно податке код којих пређашње вредности утичу на тренутне (као што је случај када су у питању подаци временских серија), пожељно је користити моделе рекурентних неуронских мрежа (*RNN*). Рекурентне неуронске мреже се од осталих неуронских мрежа разликују по постојању конекција између слојева које нису искључиво у смеру кретања од улазног ка излазном слоју. Тачније, рекурентна мрежа „учи” тако што се у процесу минимизирања функције губитка враћа (тзв. процес пропације уназад – енгл. *back propagation*). Због проблема кратког памћења пређашњих стања инпута у класичним мрежама *RNN* (већ после неколико периода информација је изгубљена), развијен је модел мрежа *LSTM* (енгл. *long short-term memory*). Оне суштински функционишу као остале мреже *RNN*, уз додатак посебне структуре самог чвора, у којем се налази неколико капија (енгл. *gate*):

- улазна капија (енгл. *input gate*), која се односи на податке који улазе у активну ћелију;
- излазна капија (енгл. *output gate*), која обрађује податке који излазе из активне ћелије;
- капија за заборављање (енгл. *forget gate*), у којој се филтрирају релевантне информације пристигле методом пропације уназад.

Иако су се рекурентне неуронске мреже показале као адекватне за моделовање модела временских серија, посебно у форми модела *LSTM*, постоји изванредан број радова

који је за потребе текуће прогнозе користио друге моделе дубоког учења, чији преглед се може наћи код *Zheng et al.* (2023). Један од њих је и модел који су у свом раду представили *Loermann & Maas* (2019) за потребе процене нивоа БДП-а у САД у актуелном тромесечју и неколико тромесечја унапред користећи модел *ANN*. Модели *ANN* (енгл. *artificial neural network*) спадају у најједноставније моделе неуронских мрежа који у својој структури садрже један скривени слој. Посебна предност коришћења модела *ANN* огледа се у могућностима одабира релевантних променљивих и доцњи коришћењем структуре мреже, путем итеративног искључивања варијабли и доцњи које се нису показале као статистички значајне за побољшавање прогнозе. Будући да модели *ANN* имају изражен проблем локалног минимума у процесу минимизације грешке модела (која је у овом случају средња квадратна грешка), оцењено је 100 насумичних модела *ANN*, који су затим обухваћени једним моделом језгра. Овај приступ назива се приступом оператора ансамбла. Модел је затим поређен с динамичким факторским моделом, а модел *ANN* имао је знатно мању грешку прогнозе.

Успех различитих врста неуронских мрежа у моделовању временских серија подстакао је бројне ауторе да креирају нове моделе дубоког учења погодне за ову врсту података. Тако је настао и модел *TFT* (*temporal fusion transformer*), тј. трансформатор темпоралне фузије. Моделе дубоког учења типа трансформатора одликује усвајање концепта самопажње (енгл. *self-attention*), односно могућност приступа инпутима дуж целе секвенце у сваком тренутку, а затим и могућност њиховог пондерисања на основу наученог, што је оно што их разликује од *RNN* (*Zeng et al.* 2022). Управо овај модел треба да реши највећи проблем модела *LSTM* – релативно кратко памћење мреже (неколико периода уназад). Ипак, дуже памћење није увек неопходно, посебно ако је циљ моделовање свега неколико периода унапред или процењивање тренутних нивоа (предвиђање садашњости).

Већ поменути приступ оператора ансамбла јесте један вид развоја машинског учења када је у питању економско моделовање коришћењем неког од модела машинског учења за обједињавање већег броја већ постојећих стандардних економетријских модела и/или модела машинског учења. Идеја да се поузданија прогноза може добити упросечавањем већег броја модела није нова у економији, али машинско учење омогућава да се пондерација и селекција најрелевантнијих модела изврши тако да се минимизира грешка прогнозе без априори наметања структуре.

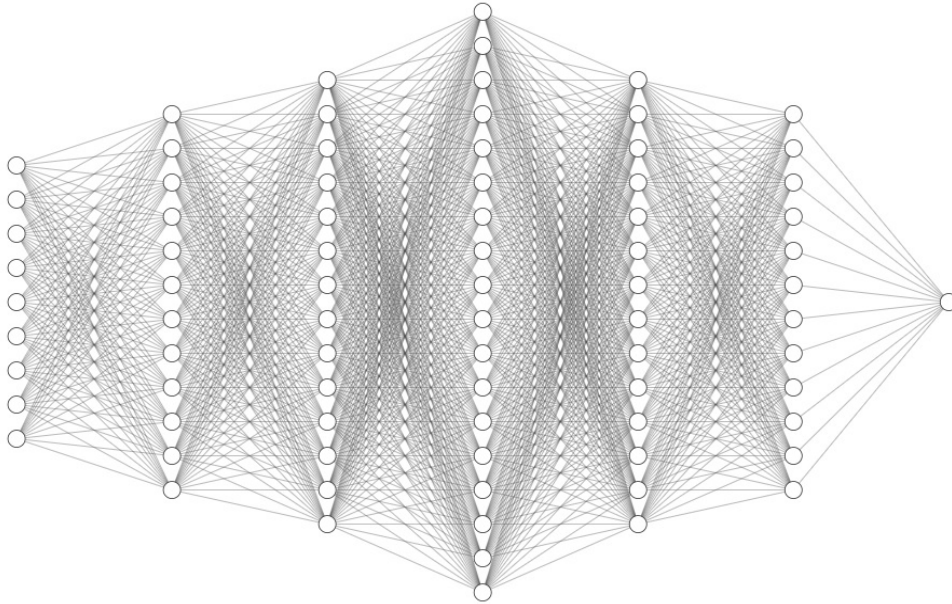
4.2. Оцена модела *LSTM*

Процес оцењивања модела *LSTM* делимично прати методологију представљену у *Medeiros et al.* (2005), иако тип модела није исти. Приступ се своди на идеју да први оцењени модел буде најједноставнији могући, а да се затим прате перформансе сваког следећег, проширеног модела. У овом раду перформансе сваке итерације модела пореде се путем средње квадратне грешке.

Оцењен је модел *LSTM* рекурентне неуронске мреже који има један слој улазних података с девет регресора, затим пет сакривених слојева са по 64, 128, 256, 128, 64

чвора и с једним чвором у излазном слоју. Апроксимација оцењеног модела има следећу структуру.

Слика 8. Апроксимација структуре оцењеног модела *LSTM*



Према већ помињаном раду *Varian (2014)*, проблем прекомерног нивоа прилагођености модела подацима који се често јављају код модела машинског учења третиран је поделом базе података на податке за тренинг, податке за валидацију и податке за оцену. Ефикасност модела мерена је на основу смањивања средње квадратне грешке, а модел је оцењиван у 1000 епоха. Крајња вредност корена средње квадратне грешке износила је 2,98, док је та вредност за сет валидације износила 4,90.

Добијену грешку ванузорачке прогнозе можемо поредити са оном добијеном оцењивањем *MIDAS* модела. Наиме, излаз из *LSTM* модела даје информацију о три различите средње квадратне грешке- прве две су наведене и односе се на део узорка коришћен за оцењивање модела и део узорка коришћен за валидацију, док би грешка добијена у делу узорка коришћеног за тестирање у *LSTM* моделу одговарала ванузорачкој грешки у *MIDAS* моделу. *MIDAS* модел има ванузорачку грешку од 2,27 (Слика 3. у делу 3.3), док је упоредива вредност код *LSTM* модела 1,85.

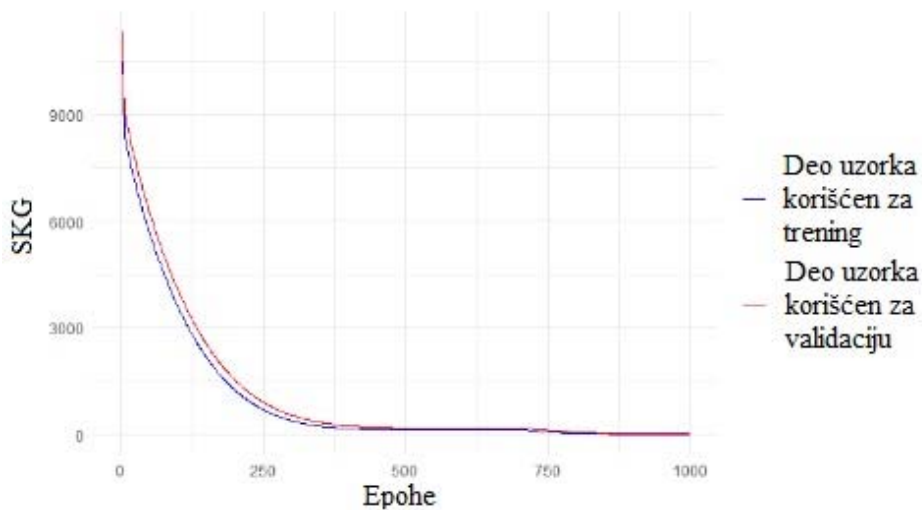
Чињеница да модел *LSTM* има већу грешку на бази за валидацију у поређењу с базом за тренинг говори у прилог и даље присутном проблему прекомерног нивоа прилагођености модела подацима, што је у случају наведеног модела готово немогуће избећи. Разлог за то је релативно мала база података која је неопходан услов за успешно постављање модела машинског учења, а посебно модела дубоког учења. Додатно је забрињавајуће што корен средње квадратне грешке предвиђања на бази за тестирање има изузетно ниску вредност у поређењу с базама за тренирање и валидацију, иако она

показује већу прецизност модела *LSTM* од модела *MIDAS*. Више је разлога за ову недоследност модела:

- Поред већ поменутог проблема величине базе, додатни проблем је то што је сет за валидацију знатно мањи од сета за тренинг, док сет за тест садржи свега десет месечних података регресора за сваку серију;
- Варијанса у бази за тестирање је знатно мања од варијанси у базама за тестирање и валидацију;
- Ова врста проблема се понекад јавља када се неуронска мрежа тренира користећи *Keras/TensorFlow*. Код коришћења градијентног спуштања грешке у мини-серијама (енгл. *batch*), вредност грешке у свакој епоси представља просек свих мини-серија које су обрађене до те тачке. Дакле, висока вредност грешке на почетку утицаће на целокупну грешку кроз просек, без обзира на то колико је смањена у току тренирања модела. С друге стране, овај проблем не постоји код тестирања успешности модела, будући да се у том случају узима само финална вредност грешке.

У наставку су дате перформансе модела на сету за тренирање и сету за валидацију.

Слика 9. Перформансе модела неуронске мреже на деловима узорка коришћених за тренинг и за валидацију



5. Закључна разматрања

У радовима *Varian* (2014) и *Murphy* (2012) наведено је да је основна мера адекватности модела машинског учења успешност предвиђања. То свакако није једини критеријум када су у питању традиционални економетријски модели, али јесте циљ модела који се користе за текућу прогнозу. Циљ оцењивања регресионог модела података мешовитих фреквенција и модела неуронских мрежа јесте процена текућег

кретања БДП-а, те је стога оправдано поредити ова два модела коришћењем корена средње квадратне грешке прогнозе.

На основу ванузорачке грешке прогнозе, може се закључити да модел неуронских мрежа *LSTM* успешније процењује текуће кретање БДП-а, као и динамику кретања БДП-а у кратком року (у овом случају до пет тромесечја унапред). Ипак, наведени су разлози за узимање резултата модела *LSTM* с резервом због малог узорка, ниске варијансе и примењеног софтвера. Корен средње квадратне грешке на бази података за валидацију модела *LSTM* значајно је виши од грешке пројекције регресионог модела података мешовитих фреквенција.

Допринос регресионог модела података мешовитих фреквенција значајан је када је у питању диференцијација између статистички значајних регресора и оних који то нису, будући да је модел *LSTM* модел неспецификованих параметара, односно не постоји могућност увида у структуру. Специфичност модела текуће прогнозе огледа се и у начину процене статистичке значајности објашњавајуће променљиве, будући да се оправданост укључивања регресора чија тест статистика значајности има високу *p*-вредност објашњава побољшањем прогнозе. Финална форма регресионог модела података мешовитих фреквенција садржи три варијабле, од којих је једна варијабла званичан индикатор статистичког завода, индекс индустријске производње, док су две варијабле алтернативни индикатори економске активности, индекс Гуглових трендова који се односи на претраге повезане с пословањем, као и мера потрошње електричне енергије. Интересантно је што се индекс индустријске производње свакако може повезати са индустријским сектором, док се индекс претрага везаних за пословање интуитивно може повезати са сектором услуга, који у суми чине готово три четвртине укупног БДП-а, посматрано с производне стране. Потрошња електричне енергије као индикатор може се повезати са свим гранама БДП-а с производне стране, те може обухватити и флукуације које нису обухваћене индустријском производњом и Гугловим индексом пословања у секторима индустрије и услуга, али може у себи садржати шокове који утичу на сектор грађевинарства и пољопривреде, који заједно с претходно поменутих гранама и нето порезима чине целокупни БДП.

Више пута у овом раду навођени су извори који као неопходан услов успешности модела машинског учења подвлаче значај довољно великих база података. „Довољно велика” база сама по себи не значи ништа ако се томе не придружи конкретна цифра. Нажалост, не постоји тачан број података који ће гарантовати да модел машинског учења функционише на најбољи могући начин и даје најбоље резултате. Чињеница је да су модели дубоког учења једним делом и направљени баш да би могли да обраде веома велике количине инпута генерисане сваког секунда првенствено коришћењем интернета. Стога, базе с којима модели дубоког учења тренирају имају и по више милиона инпута, што је немогуће постићи на макроекономским подацима. Ипак, модели дубоког учења бележиће побољшање перформанси додавањем квалитетних, нових инпута (било је помена о контрапродуктивности у проширивању базе подацима који имају проблеме недостајућих сегмената, колинеарности, ауторегресивности и сл.). Ова тврдња је тачна не само за моделе машинског односно дубоког учења већ и за традиционалне економетријске моделе, помоћу којих је лакше доћи до смислених

репрезентација стварности ако постоји „довољан” број података. Иако не постоји конкретна цифра, готово је сигурно да база података коришћена у овом раду не задовољава критеријум величине при којој је оправдано с традиционалних економетријских модела прећи на моделе дубоког учења. С друге стране, комплексност и нелинеарност које су присутне у овој бази, а које се огледају у великом броју потенцијалних регресора, њиховој варирајућој фреквенцији и комплексној динамици и проблематици прогнозирања БДП-а, делимично оправдавају покушај моделовања алтернативним приступима у односу на класичне економетријске моделе.

Један од разлога малог броја података јесте и укључивање алтернативних индикатора, за које су серије знатно краће од званичних макроекономских индикатора економске активности. Ипак, ови индикатори су се показали као статистички значајни (потрошња струје), и њиховим укључивањем у модел остварени су бољи резултати (Гуглови трендови) него коришћењем упоредивог модела базираног искључиво на званичној статистици. Поред тога, комплексност у начину прикупљања, обраде, објављивања и фреквенције ових индикатора такође говори у прилог коришћењу модела машинског учења. Стога, ако број доступних индикатора и дужина серије која је на располагању економетричарима наставе да расту, може се очекивати и пораст перформанси, и традиционалних, и модела машинског учења.

Укратко, оцењени регресиони модел података мешовитих фреквенција и модел неуронске мреже на адекватан начин моделују динамику БДП-а на кратак рок, при чему се модел неуронске мреже *LSTM* показао као ефикаснији ако се за поређење користи корен средње квадратне грешке прогнозе. Оба модела показала су тенденцију ка прекомереном прилагођавању доступним подацима, што је пре свега последица релативно мале базе података на основу које су оцењивани модели. Ипак, иако се модел *LSTM* показао као бољи, ако се има у виду компутациона захтевност и немогућност анализе значајности појединачних параметара, модел *MIDAS* даје више него адекватну краткорочну пројекцију динамике српског БДП-а. Имајући у виду да је једна од хипотеза овог рада провера статистичке значајности алтернативних параметара у комбинацији са званичним макроекономским индикаторима, увидом у модел *MIDAS* можемо закључити да су Гуглов индикатор претраживања пословних термина и индикатор потрошње струје преузет с платформе *ENTSO-E* доприносе побољшању краткорочне пројекције. Осим тога, коришћени алтернативни индикатори у комбинацији са индикатором индустријске производње на поједностављен начин моделују појединачне гране у оквиру производног приступа оцени укупног БДП-а. Суштински, иако се модел дубоког учења показао као бољи у пројектовању краткорочне динамике БДП-а Србије, регресиони модел података мешовитих фреквенција због своје структуре и транспарентности представља вредан инпут креаторима економских политика, предузећима и појединцима који имају корист од благовремене и адекватне оцене економске активности. С порастом базе података очекује се и да ће перформансе оба оцењена модела, а посебно модела дубоког учења, бити све боље.

Литература

- Almon, S. (1965). The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures. *Econometrica*, 33 (1), Article 1. <https://doi.org/10.2307/1911894>.
- Alzubi, J., Nayyar, A., & Kumar, A. (2018). Machine Learning from Theory to Algorithms: An Overview. *Journal of Physics: Conference Series*, 1142, 012012. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1142/1/012012>.
- Anesti, N., Galvão, A. B. & Miranda-Agrippino, S. (2018). Uncertain Kingdom: Nowcasting GDP and its Revisions. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3278618>.
- Angelini, E., Camba-Mendez, G., Giannone, D., Reichlin, L. & Rünstler, G. (2011). Short-term forecasts of euro area GDP growth. *The Econometrics Journal*, 14 (1), C25–C44. <https://doi.org/10.1111/j.1368-423X.2010.00328.x>.
- Arencibia Pareja, A., Gomez-Loscos, A., Luis López, M. D. & Perez-Quiros, G. (2020). A Short Term Forecasting Model for the Spanish GDP and its Demand Components. *Economía*, 43 (85), 1–30. <https://doi.org/10.18800/economia.202001.001>.
- Armesto, M. T., Engemann, K. M. & Owyang, M. T. (2010). Forecasting with Mixed Frequencies. *Federal reserve bank of st. Louis review*.
- Balassa, B. (1985). Exports, policy choices, and economic growth in developing countries after the 1973 oil shock. *Journal of Development Economics*, 18 (1), 23–35. [https://doi.org/10.1016/0304-3878\(85\)90004-5](https://doi.org/10.1016/0304-3878(85)90004-5).
- Bañbura, M. & Rünstler, G. (2011). A look into the factor model black box: Publication lags and the role of hard and soft data in forecasting GDP. *International Journal of Forecasting*, 27 (2), 333–346. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2010.01.011>.
- Barbaglia, L., Consoli, S. & Manzan, S. (2021). Forecasting GDP in Europe with Textual Data. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3898680>.
- Barhoumi, K., Darné, O., Ferrara, L. & Pluyaud, B. (2012). Monthly GDP Forecasting Using Bridge Models: Application for the French Economy. *Bulletin of Economic Research*, 64, s53–s70. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8586.2010.00359.x>.
- Burns, A. & Mitchell, W. (1946). *Measuring Business Cycles*. NBER.
- Chernis, T. & Sekkel, R. (2017). A dynamic factor model for nowcasting Canadian GDP growth. *Empirical Economics*, 53 (1), 217–234. <https://doi.org/10.1007/s00181-017-1254-1>.
- Choi, H. & Varian, H. (2012). Predicting the Present with Google Trends. *Economic Record*, 88, 2–9. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.2012.00809.x>.
- Chollet, F. & Allaire, J. J. (2018). *Deep learning with R*. Manning.
- Chollet, F., Kalinowski, T. & Allaire, J. J. (2022). *Deep learning with R* (Second edition). Manning.
- Cortes, C. & Vapnik, V. (1995). Support-vector networks. *Machine Learning*, 20 (3), 273–297. <https://doi.org/10.1007/BF00994018>.
- Elsayed, S., Thyssens, D., Rashed, A., Jomaa, H. S. & Schmidt-Thieme, L. (2021). *Do We Really Need Deep Learning Models for Time Series Forecasting?* (arXiv:2101.02118). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2101.02118>.
- Fradkov, A. (2020). Early History of Machine Learning. *IFAC-PapersOnLine*, 53 (2), 1385–1390. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1888>.

- Frale, C. & Monteforte, L. (2010). *FaMIDAS: A Mixed Frequency Factor Model with MIDAS structure*.
- Ghysels, E., Kvedaras, V. & Zemlyis, V. (2016). Mixed Frequency Data Sampling Regression Models: The R Package *MIDASR*. *Journal of Statistical Software*, 72 (4), Article 4. <https://doi.org/10.18637/jss.v072.i04>.
- Ghysels, E., Santa-Clara, P. & Valkanov, R. (2002). *The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models*.
- Ghysels, E., Santa-Clara, P. & Valkanov, R. (2004). *Predicting Volatility: Getting the Most out of Return Data Sampled at Different Frequencies* (No. w10914; Issue w10914, p. w10914). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w10914>.
- Giannone, D., Agrippino, S. M. & Modugno, M. (2013). *Nowcasting China Real GDP*.
- Giannone, D., Reichlin, L. & Small, D. (2008). Nowcasting: The real-time informational content of macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, 55 (4), 665–676. <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2008.05.010>.
- Goulet Coulombe, P., Leroux, M., Stevanovic, D. & Surprenant, S. (2022). How is machine learning useful for macroeconomic forecasting? *Journal of Applied Econometrics*, 37 (5), Article 5.
- Hopp, D. (2022). Economic nowcasting with long short-term memory artificial neural networks. *Journal of Official Statistics*, 38 (3), 847–873.
- Ilin, C., Annan-Phan, S., Tai, X. H., Mehra, S., Hsiang, S. & Blumenstock, J. E. (2021). Public mobility data enables COVID-19 forecasting and management at local and global scales. *Scientific Reports*, 11(1), 13531. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-92892-8>.
- Janiesch, C., Zschech, P., & Heinrich, K. (2021). Machine learning and deep learning. *Electronic Markets*, 31 (3), 685–695. <https://doi.org/10.1007/s12525-021-00475-2>.
- Kitchen, J. & Monaco, R. (2003). Real-time Forecasting in Practice: The U.S. Treasury Staff's Real-time GDP Forecast System. *U.S. Department of the Treasury*.
- Koenig, E. F., Dolmas, S. & Piger, J. (2003). The Use and Abuse of Real-Time Data in Economic Forecasting. *Review of Economics and Statistics*, 85 (3), 618–628. <https://doi.org/10.1162/003465303322369768>.
- Loermann, J. & Maas, B. (2019). *Nowcasting US GDP with artificial neural networks*.
- Markiewicz, A., Verhoeks, R. C., Verschoor, W. F. C. & Zwinkels, R. C. J. (2018). *The Winner Takes it All: Measuring Attention and Predicting Exchange Rates with Google Trends*.
- Medeiros, M. C., Terasvirta, T. & Rech, G. (2005). Building Neural Network Models for Time Series: A Statistical Approach. *Journal of Forecasting*, 25 (1), Article 1.
- Moody, J., Levin, U. & Rehfuss, S. (1993). *Predicting the U.S. Index of Industrial Production (Extended Abstract)*.
- Mourougane, A. (2006). *Forecasting Monthly GDP for Canada*. OECD. <https://doi.org/10.1787/421416670553>.
- Murphy, K. P. (2012). *Machine learning: A probabilistic perspective*. MIT Press.
- Narita, F. & Yin, R. (2018). *In Search of Information: Use of Google Trends' Data to Narrow Information Gaps for Low-income Developing Countries* [IMF Working Papers].
- Plasek, A. (2016). On the Cruelty of Really Writing a History of Machine Learning. *IEEE Annals of the History of Computing*, 38(4), 6–8. <https://doi.org/10.1109/MAHC.2016.43>.

- Sarker, I. H. (2021). Machine Learning: Algorithms, Real-World Applications and Research Directions. *SN Computer Science*, 2 (3), 160. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00592-x>.
- Schmidt, T., & Vosen, S. (2009). Forecasting Private Consumption: Survey-based Indicators vs. Google Trends. *Ruhr Economic Papers*.
- Siarni-Namini, S., Tavakoli, N. & Namin, A. S. (2019). The Performance of LSTM and BiLSTM in Forecasting Time Series. *2019 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*, 3285–3292. <https://doi.org/10.1109/BigData47090.2019.9005997>.
- Sinko, A. (2008). *Some Applications of Mixed Data Sampling Regression Models*.
- Stock, J. H. & Watson, M. W. (2016). Dynamic Factor Models, Factor-Augmented Vector Autoregressions, and Structural Vector Autoregressions in Macroeconomics. In *Handbook of Macroeconomics* (Vol. 2, pp. 415–525). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/bs.hesmac.2016.04.002>.
- Stock, J., & Watson, M. (1988). *A Probability Model of The Coincident Economic Indicators* (No. w2772; p. w2772). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w2772>.
- Sun, S. & Anwar, S. (2015). Electricity consumption, industrial production, and entrepreneurship in Singapore. *Energy Policy*, 77, 70–78. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2014.11.036>.
- Turnovsky, S. J. (2000). *Methods of macroeconomic dynamics* (2. ed). MIT Press.
- Varian, H. R. (2014). Big Data: New Tricks for Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 28 (2), 3–28. <https://doi.org/10.1257/jep.28.2.3>.
- Woloszko, N. (2020). *Tracking activity in real time with Google Trends* (OECD Economics Department Working Papers No. 1634; OECD Economics Department Working Papers, Vol. 1634). <https://doi.org/10.1787/6b9c7518-en>.
- Wu, L. & Brynjolfsson, E. (2015). The Future of Prediction: How Google Searches Foreshadow Housing Prices and Sales. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2022293>.
- Zeng, A., Chen, M., Zhang, L. & Xu, Q. (2022). *Are Transformers Effective for Time Series Forecasting?* (arXiv:2205.13504). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2205.13504>.
- Zhang, Y. & Ling, C. (2018). A strategy to apply machine learning to small datasets in materials science. *Npj Computational Materials*, 4(1), 25. <https://doi.org/10.1038/s41524-018-0081-z>.
- Zheng, Y., Xu, Z. & Xiao, A. (2023). Deep learning in economics: A systematic and critical review. *Artificial Intelligence Review*. <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10272-8>.